Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102 - 3 Álgebra Lineal
19 de Noviembre de 2017

Clase Auxiliar # 8: Matrices Representantes y de Cambio de Base

Profesora: Natacha Astromujoff
Auxiliares: María Eugenia Martínez y Nicolás Zalduendo

P1. Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z+w \\ 2x+y-z \\ x-y+z-w \end{pmatrix}$$

Y además considere las siguientes bases:

$$\beta_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ en } \mathbb{R}^4,\ \beta_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ en } \mathbb{R}^3$$

(a) Encuentre la matriz representante de T con respecto a β_1 y β_2 calculando la imagen de los elementos de β_1 y descomponiendo en β_2

(b) Encuentre la matriz representante de T con respecto a β_1 y β_2 usando matrices de cambio de base apropiadas.

P2. Sea $\beta = \{1, x, x^2\}$ la base canónica del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Considere:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Encuentre la base β' tal que Q sea representante de la identidad de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ con las bases β' en la partida y β en la llegada.

(b) Sea $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz representante con respecto a las bases canónicas es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcule la matriz representante de T con respecto a las bases β' en $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y la canónica en $\mathbb{R}^3$

(c) Encuentre T explícitamente.

P3. **(a)** Considere el conjunto $\mathcal{A} = \{1+3x+2x^2, 1+x-x^2, x+x^2\}$ y verifique que es una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, el espacio de los polinomios de grado a lo más 2.

(b) Ahora considere $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y justifique por qué $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

(c) Sea $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y sea

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la matriz representante de T con respecto a $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ en el espacio que corresponda. Encuentre T explícitamente. ¿Es T invertible?

P4. Consideremos el espacio vectorial $C(\mathbb{R},\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ es continua }\}$ y su subespacio vectorial:

$$S = \langle \{cos(x), sin(x), e^x, x, 1\} \rangle$$

(a) Sea $T : S \longrightarrow S$ donde para $f \in S, T(f) = f'(x)$, vea que esta bien definida y encuentre su matriz representante en $S = \{cos(x), sin(x), e^x, x, 1\}$

(b) Usando la función T definida en la parte (a), resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$f'(x) = e^x + 5cos(x) + sen(x) - 10$$

$$f''(x) = 2e^x + 2cos(x) + sen(x)$$