Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102 - 1 Álgebra Lineal
12 de Noviembre de 2018

Clase Auxiliar # 7: Transformaciones Lineales

Profesora: Natacha Astromujoff
Auxiliares: María Eugenia Martínez y Nicolás Zalduendo

P1. Considere V un e.v y sean V_1, V_2 s.e.v tales que $V = V_1 \bigoplus V_2$. Sea $f : V \longrightarrow V_2$ la función que verifica:

$$v = v_1 + v_2 \to f(v) = v_2$$

Justifique por qué f es función y pruebe que es una transformación lineal.

P2. Sean U y V dos espacios vectoriales y sean $\{u_1, \ldots, u_n\} \subseteq U$ una base de U y $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ un subconjunto no necesariamente $l.i$ de V (note que no necesariamente $dim(U) = dim(V)$). Pruebe que existe una única transformación lineal $T : U \longrightarrow V$ que cumple

$$T(u_i) = v_i, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

Esto en particular nos dice que una transformación lineal queda completamente identificada si conocemos la imagen de los elementos de alguna base del dominio.

P3. Sea $T : \mathcal{M}_{23}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$ tal que:

$$T \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b+d \\ b+d & f \end{pmatrix}$$

(a) Demuestre que T es una transformación lineal.

(b) Encuentre bases y dimensiones para $\mathrm{Ker}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.

P4. Sean U, V y W espacios vectoriales y considere $g : U \longrightarrow V$ y $f : V \longrightarrow W$ dos transformaciones lineales. Pruebe que:

(a) $\mathrm{Ker}(g) \subseteq \mathrm{Ker}(f \circ g)$

(b) Si $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\}$, entonces $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(f \circ g)$

(c) $\mathrm{Im}(f \circ g) \subseteq \mathrm{Im}(f)$

(d) Si $\mathrm{Im}(g) = V$, entonces $\mathrm{Im}(f \circ g) = \mathrm{Im}(f)$