Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102 - 1 Álgebra Lineal
31 de Octubre de 2018

Taller de Resolución de Problemas #5

Profesor: Natacha Astromujoff
Auxiliares: María Eugenia Martínez y Nicolás Zalduendo

P1. Casi linealmente independiente
Sea V un e.v. de dimensión n. Diremos que $\{v_1, \ldots, v_m\} \subseteq V$ es un conjunto *casi linealmente independiente* (c.l.i.) si $m > n$ y para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$ el conjunto $\{v_1, \ldots, v_m\} \setminus \{v_j\}$ es linealmente independiente. Sea $\{v_1, \ldots, v_m\}$ c.l.i., ¿podría calcular m en función de n?.

- **Extensión:** Es necesaria la hipótesis de $m > n$ antes? Dar un contraejemplo.
- **Extensión:** Dé un ejemplo en $V = \mathbb{R}^2$ de un conjunto c.l.i..

P2. Sea V un e.v. sobre $\mathbb{K}$. Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base del e.v. V. Dado $p \leq n$ se definen los vectores

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} v_j \quad i = 1, \ldots, p,$$

donde los α_{ij} cumplen:

- Si $j < i$, entonces $\alpha_{ij} = 0$ y
- $\alpha_{ii} \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, p$

¿El conjunto $\{x_1, \ldots, x_p\}$ es l.i. o l.d.?

- **Extensión:** ¿Se podría generar una base de V con elementos del tipo x_i? ¿Cómo debería ser p?

P3. Sea $V = \{(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid s_{n+2} = s_{n+1} + s_n\}$ donde $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ denota una sucesión real. ¿De qué espacio vectorial podría ser subespacio V?

- **Extensión:** Probar que efectivamente es un subespacio del espacio de las sucesiones reales.
- **Extensión:** Encuentre una base de V.
- **Extensión:** ¿Cuál es la dimensión de V?

P4. Extracción de base
Extraiga una base del conjunto de vectores:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$