MA1002-4 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar 2: Continuidad Uniforme y Derivadas

4 de octubre de 2018

P1. [TVI]

a) Sea la función $f(x) = x^{13} + 7x^3 - 5$. Demuestre que es continua y que existe un único real $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$

b) Demuestre que la ecuación $x^3 = 2^x$ tiene solución.

P2. [Continuidad Uniforme]

a) Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}$ una función. Demuestre que los siguientes puntos son equivalentes

1) f es uniformemente continua en A
2) $\forall (x_n), (y_n) \subseteq A, |x_n - y_n| \to 0 \implies |f(x_n) - f(y_n)| \to 0$
Note que (x_n) o (y_n) no necesariamente convergen.

b) Use el resultado de la parte anterior para demostrar que $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua.

c) Estudie la continuidad uniforme en $(0, 1)$ de las siguientes funciones:

1) $xsin(1/x)$ 2) $f(x) = e^x cos(\frac{1}{x})$

P3. [Matraca] Derive las siguientes funciones

a) $\dfrac{senh(4x)}{ln(x^2+1)}$ *b*) x^x *c*) $cosh^{-1}(x)$

P4. [Derivada n-ésima] Utilizando la derivada de la función $f(x) = x^{2n}$, demuestre que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

P5. [Derivada Implicita
Encuentre la recta tangente y normal a la curva de ecuación

$$e^{2arcsen(y\cdot x)} = ln(1 + x^2 + y^2)$$

En el punto P donde la curva intersecta al eje de las abscisas $(y = 0)$, con abscisa positiva $(x > 0)$

P6. [Definición de Derivada] Sea la función $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ definida por

$$\phi(x) = \begin{cases} x^n \cdot sin(\frac{1}{x}) & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Estudie la diferenciabilidad de ϕ en $\mathbb{R}$ para diferentes valores de n

"In mathematics the art of asking questions is more valuable than solving problems."
Georg Cantor

- **[TVI o Bolzano]** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)f(b) \le 0$. Entonces existe $\overline{x} \in [a, b]$ tal que $f(\overline{x}) = 0$.

- **[TVI-Generalizado]** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Si $c, d \in f([a, b])$. Entonces $\forall x_0 \in [c, d], \exists \overline{x} \in [a, b]$ tal que $f(\overline{x}) = x_0$

- **[Teorema de Weierstras]**
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es acotada y alcanza su mínimo y su máximo en $[a, b]$.

- Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y estrictamente monótona (creciente o decreciente) con I un intervalo. Entonces $J = f(I)$ es un intervalo y la inversa $f^{-1} : J \to I$ es continua.

- **[Continuidad Uniforme]**
Una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice uniformemente continua si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$(\forall x, y \in A) \quad |x - y| \le \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \varepsilon$$

Es decir, f será uniformemente continua si δ únicamente depende de ε y no del eventual $\overline{x}$ que puedo estudiar.

- Toda función uniformemente continua es continua.

- Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con A cerrado y acotado. Entonces f es uniformemente continua si y sólo si es continua en todo punto $\overline{x} \in A$

- Diremos que $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es derivable en el punto $\overline{x} \in (a, b)$, si existe el limite

$$\lim_{x \to \overline{x}} \frac{f(x) - f(\overline{x})}{x - \overline{x}}$$

Equivalentemente, f es derivable en $\overline{x}$ si existe $m = f'(\overline{x})$ tal que $f(x) = f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x - \overline{x}) + o(x - \overline{x})$

- Si f es derivable en $\overline{x}$ entonces es continua en $\overline{x}$

- **[Álgebra de derivadas]** Sean $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivables en $\overline{x} \in (a, b)$. Entonces:

  1. $f \pm g$ es derivable en $\overline{x}$ con
  $$(f \pm g)'(\overline{x}) = f'(x) \pm g'(x)$$
  2. $f \cdot g$ es derivable en $\overline{x}$ con
  $$(f \cdot g)' = f'(\overline{x})g(\overline{x}) + f(\overline{x})g'(\overline{x})$$
  3. Si $g(\overline{x}) \neq 0$ entonces $\frac{f}{g}$ es derivable en $\overline{x}$ con
  $$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(\overline{x})g(\overline{x}) - f(\overline{x})g'(\overline{x})}{g^2(\overline{x})}$$

- **[Regla de la cadena]**
Sean $f : (a, b) \to (c, d)$ derivable en $\overline{x} \in (a, b)$ y $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ derivable en $\overline{y} = f(\overline{x}) \in (c, d)$. Entonces $g \circ f$ es derivable en $\overline{x}$ con

$$(g \circ f)'(\overline{x}) = g'(f(\overline{x})) \cdot f'(\overline{x})$$

Tambien se puede usar la notación de leibniz obteniendo $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$ donde $y = y(u)$ y $u = u(x)$, es decir y depende de u y u depende de x.

- **[Derivada de la función inversa]** Sea $f : (a, b) \to (c, d)$ biyectiva y continua. Si f es derivable en $\overline{x} \in (a, b)$ con $f'(\overline{x}) \neq 0$, entonces la función inversa $f^{-1} : (c, d) \to (a, b)$ es derivable en $\overline{y} = f(\overline{x}) \in (c, d)$ con

$$(f^{-1})'(\overline{y}) = \frac{1}{f'(\overline{x})} = \frac{1}{f'(f^{-1}(\overline{y}))}$$

Analogamente $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ donde $y = y(x)$ y $x = x(y)$

- **[Fórmula de Leibnitz]** Para f y g funciones con derivadas de orden n en a, la derivada de orden n de $(f \cdot g)$ está dada por:

$$(f \cdot g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) \cdot g^{(n-k)}(a)$$