MA1002-4 y 6 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro y Felipe Matus

Auxiliar 13: Control #3

14 de diciembre de 2018

P1. Decida si las siguiente series son o no convergentes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{n^2+2n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^{2n}}{1+x^{2n}}$

P2. Calcule el largo de la curva $y = a\cosh(x/a)$ con $x \in [0, a]$.

P3. Encuentre la función $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ que cumple que $f(0) = 0$ y además el largo de la curva desde 0 hasta cualquier punto x es $x^2 + 2x - f(x)$.

P4. La suma de los primeros n términos de una serie es $\dfrac{5n^2 - 3n + 2}{n^2 - 1}$. Encuentre una expresión para el término general de la suma (a_n) y decida si es o no convergente. Encuentre el valor de la serie en caso de ser convergente.

P5. Pruebe que

$$\lim_{u\to\infty} \int_{-u}^{u} \frac{1+x}{1+x^2}dx = \pi$$

Pruebe que, sin embargo, en general $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2}dx$ diverge.

P6. Calcule

$$\int_0^1 \frac{x\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

P7. Ayudándose de alguna serie, calcule la integral $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{du}{1-u^2}$ para demostrar que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{4^k(2k+1)} = \ln 3$$

P8. Encuentre el radio e intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^{3/2}} x^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}\right)(x-1)^n$, con $0 < a < b$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(3+(-1)^n)^n}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 4^n x^{2n}$

P9. Dada la siguiente ecuación diferencial

$$xf'(x) + f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Encontrar una serie de potencias para f.

P10. Encuentre una serie de potencias para la función $f(x) = ln(1 + x^2)$.

Indicación: Comience por desarrollar la derivada en la forma $f'(x) = 2x \sum a_n x^n$

P11. El desarrollo en serie para cierta función f es

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n}$$

Cuyo intervalo de convergencia es $[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$ (no lo demuestre)

a) Determine la serie que representa $f'(x)$, y preséntela como una función conocida.

b) Determine $f(x)$

c) Utilice lo anterior para calcular el valor de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

P12. Obtener la serie de potencias de xe^x en torno a $x = 0$ para demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)} = \frac{1}{2}$$

Recuerdo:

- Para calcular el radio de convergencia de una serie de potencias de la forma $\sum_{k \geq n_0} a_n x^n$ existe las siguientes tres formas (todas entregaran el mismo valor si existe), cual usar dependerá del ejercicio.

  1) $L = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$
  2) $L = \lim_{n \to \infty} (|a_n|)^{\frac{1}{n}}$
  3) $L = \lim_{n \to \infty} sup_{k \geq n}(|a_n|)^{\frac{1}{n}}$

  En caso de existir L se tiene que el radio de convergencia es: $R = \frac{1}{L}$

- Dada una serie de potencias $\sum a_k x^k$ con intervalo de convergencia I , definimos:

  $$f(x) = \sum a_k x^k$$

  Esta función es continua, derivable e integrable. Más aún las integrales y derivadas son término a término, esto es que la derivada o la integral la pueden "pasar"para dentro de la serie

- Aprenderse $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ para $|x| < 1$ y sus variantes y traslaciones como:

  - $f(-x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$ para $|x| < 1$
  - $f(x-1) = \frac{1}{1-(x-1)} = \frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n$ para $|x-1| < 1$

  Y ocupar derivadas e integrales para calcular otras funciones (por ejemplo logaritmos).