

MA1002-4 Cálculo Diferencial e Integral**Profesor:** Leonardo Sánchez C.**Auxiliar:** Marcelo Navarro**Auxiliar Examen**

28 de diciembre de 2018

Ha llegado ese momento. Es hora de enfrentar el examen. Lo siguiente es lo que deben manejar tanto conceptual, como algebraicamente.

- ¿Qué es la derivada? ¿Cómo se dibuja este significado?
- Cálculo de áreas (cartesianas, polares). Volúmenes de rotación. Área entre curvas y volúmenes más raros.
- Teorema Fundamental del Cálculo. ¿Qué dice? ¿Cuándo funciona? ¿Cómo se deriva una integral?
- Análisis de funciones. ¿Cómo uso las herramientas? Crecimiento a través de la derivada. Concavidad a través de la segunda derivada.
- Optimización. ¿Cómo plantear un problema? ¿Hay más de un planteamiento para un mismo problema? ¿Todos deben resultar igual? ¿Cómo se obtienen los candidatos a óptimo? ¿Cómo descartar candidatos o asegurar que son efectivamente mínimo o máximo local? ¿Siempre hay máximo/mínimo global o local?
- Criterios de convergencia para integrales impropias. ¿Cuáles son los conocidos? ¿Por qué funcionan? ¿Cómo se pueden usar?
- Lo mismo con series numéricas y de potencias.
- Radio e intervalo de convergencia. ¿Es el intervalo obtenido gratis o hay que pensar en algo más?
- Integración y derivación de series.
- Curvas, parametrizaciones. ¿Qué es la longitud de arco? ¿Cuál es la arcoparametrización?

P1. Considere la curva Γ parametrizada por

$$\vec{r}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$$

Pruebe que la curva está parametrizada en longitud de arco. Calcule $T(s), N(s), B(s)$ además de la curvatura y torsión.

P2. Sea la curva que se forma al intersectar:

$$x^2 - y^2 = 1 \quad \text{y} \quad x \tanh(z) = y$$

con $0 \leq z \leq 1$ y $x, y \geq 0$. Se pide:

- a) Parametrizar la curva y calcular su longitud.
- b) Encontrar su parametrización en longitud de arco.

c) Calcule el vector Tangente, Normal y Binormal.

P3. Calcular la masa de un alambre cuya forma está dada por la curva $r(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in [0, 3]$ y cuya densidad en cada punto es $\rho = \rho(x, y, z) = 2x + 9z$. Calcule su centro de masa (deje expresado como integral).

P4. Sea una curva Γ que cumple con que existe un punto P_0 por el cual pasan todas las rectas normales de Γ . Se define $P_0 = \vec{\sigma}(s) + \phi(s)\hat{N}(s)$, donde $\vec{\sigma}(s)$ es la parametrización en longitud de arco de Γ , $(\hat{N})(s)$ es el vector normal a Γ y ϕ es una función de clase $\mathcal{C}^1$ con $\phi : [0, l_0] \rightarrow \mathbb{R}$. Demuestre que $\kappa(s) = 1$, $\tau(s)\phi(s) = 0$ y $\phi'(s) = 0$, donde $\kappa(s)$ y $\tau(s)$ son la curvatura y la torsión respectivamente. Concluya que Γ es una curva plana.

Indicación: Quizás le sea útil ocupar que $\hat{T}$, $\hat{N}$ y $\hat{B}$ son linealmente independientes.

Definición: (Independencia Lineal) Sea $\{v_1, v_2, \dots, v_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ diremos que estos vectores son linealmente independientes si $\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i = \vec{0} \Rightarrow \lambda_i = 0, \forall i = 1, \dots, m$

P5. Se quiere construir un cilindro de altura $h > 0$ y base circular de radio $R > 0$ de modo que $R = f(h)$ para alguna función f .

Determine las dimensiones del cilindro que cumple estas restricciones y tiene máximo volumen, en los casos $f(x) = e^{-x}$ y $f(x) = e^{-x^2}$.

P6. Sea $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función creciente, continua en su dominio, derivable en el interior y tal que $f(0) = 0$.

Pruebe que la función $F(x) = x \int_0^x f^2(t)dt$ es una función creciente y convexa en $[0, +\infty)$.

P7. Determine el área de la región delimitada en el primer cuadrante por las curvas de ecuación $xy = 1$, $y = x^2$, $y = 8x^2$.

P8. Calcule el valor de la integral siguiente

$$\int_{-12345678910\pi}^{12345678910\pi} \frac{\cos^{123456789}(x) + 1}{201620172018^x + 1} dx$$

Pruebe que si $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$ y f es una función par, Riemann integrable en $[-a, a]$, entonces

$$\int_{-a}^a \frac{f(x) + 1}{b^x + 1} dx = a + \int_0^a f(x) dx$$

P9. Recuerde que la sucesión de Fibonacci, dada por $a_1 = a_2 = 1$ y $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$

a) Definamos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 \dots$$

Demuestre que la serie anterior converge cuando $|x| < \frac{1}{2}$ obs: puede ocupar sin demostrar que existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

b) Demuestre que si $|x| < \frac{1}{2}$

$$f(x) = \frac{-1}{x^2 + x - 1}$$

- c) Encuentre otra expresión en series de potencias para $f(x)$
- d) Usando que dos series son iguales si son iguales término a término, concluya una forma cerrada para la sucesión de fibonacci.

- **[Norma eucladiana]** Sea $\vec{x} = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, su norma eucladiana es

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_i^2 + \dots + x_n^2}$$

- **[Curva]** $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ es una curva si existe una función continua $\vec{r} : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, llamada parametrización de la curva, tal que $\Gamma = \{\vec{r}(t) : t \in [a, b]\}$.

- Una curva Γ es:

- **Suave:** Si admite una parametrización de clase C^1 .
- **Regular:** Si admite una parametrización $\vec{r}(t)$ de clase C^1 tal que $\|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\| > 0$, $\forall t \in [a, b]$. A este tipo de parametrizaciones se les llama regular.
- **Simple:** Si admite una parametrización de clase C^1 que sea inyectiva.
- **Cerrada:** Si admite una parametrización $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 tal que: $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$.
- **Cerrada simple:** Si admite una parametrización $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 tal que $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ y que sea inyectiva sobre $[a, b)$.

- **[Parametrizaciones equivalentes]** Sea $\vec{r}_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\vec{r}_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dos parametrizaciones de una curva Γ . $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ son equivalentes si existe una función biyectiva $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ de clase C^1 tal que

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(\varphi(t)), \forall t \in [a, b]$$

En este caso φ se llamará reparametrización.

- **[Longitud de Curva]** Sea Γ una curva simple y regular. Sea $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización regular de Γ . Definimos la longitud de Γ mediante

$$L(\Gamma) = \int_a^b \left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\| dt$$

- **[Longitud de Arco]** Sea Γ una curva simple y regular. Sea $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización regular de Γ . Definimos la función longitud de arco $s : [a, b] \rightarrow [0, L(\Gamma)]$ como

$$s(t) = \int_a^t \left\| \frac{d\vec{r}(\tau)}{d\tau} \right\| d\tau$$

- **[Parametrización natural]** Para obtener la parametrización natural (o de longitud de curva). Es necesario obtener la función de longitud de arco ($s(t)$) y luego desde esta relación despejar t en función s , para finalmente encontrar:

$$\vec{\sigma}(s) = \vec{r}(t(s))$$

- **[Observaciones]** Cualquier otra parametrización regular conduce a la misma parametrización natural solo que puede variar el sentido (dependiendo del sentido de la parametrización). También se cumple que: $\left\| \frac{d\vec{\sigma}}{ds} \right\| = 1$

- Sea Γ una curva simple y regular, con parametrización $\vec{r}(t)$ y parametrización natural $\sigma(s)$. Se tiene que:

	En función de s	En función de t
Velocidad $\vec{v}(t)$		$\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$
Rapidez $v(t)$	$\frac{ds}{dt}(t)$	$\left\ \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\ $
Vector Tangente T	$\frac{d\sigma}{ds}(s)$	$\frac{\vec{v}(t)}{v(t)} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}(t)}{\left\ \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\ }$
Vector Normal N	$\frac{\frac{dT(s)}{ds}}{\left\ \frac{dT(s)}{ds} \right\ }$	$\frac{\frac{dT(t)}{dt}}{\left\ \frac{dT(t)}{dt} \right\ }$
Vector Binormal B	$T(s) \times N(s)$	$T(t) \times N(t)$
Curvatura κ	$\left\ \frac{dT(s)}{ds} \right\ $	$\left\ \frac{\frac{dT(t)}{dt}}{\frac{d\vec{r}(t)}{dt}} \right\ $
Radio de Curvatura R	$\frac{1}{\kappa(s)}$	$\frac{1}{\kappa(t)}$
Torsión τ	$-N(s) \cdot \frac{dB(s)}{ds}$	$-N(s) \cdot \frac{\frac{dB(t)}{dt}}{\left\ \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\ }$

Obs: Dado una curva Γ , si $\tau = 0$ es una curva plana, por otro lado, si $\kappa = 0$ es una recta

- Fórmulas de Frenet:** Las siguientes relaciones se tiene al estar evaluadas en la parametrización natural s .

$$\bullet \frac{d\hat{T}}{ds} = \kappa \hat{N} \qquad \bullet \frac{d\hat{N}}{ds} = -\kappa \hat{T} + \tau \hat{B} \qquad \bullet \frac{d\hat{B}}{ds} = -\tau \hat{N}$$

- Integral de una función sobre una curva:** Sea Γ una curva simple y regular en $\mathbb{R}^n$, y sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Se define la integral de f sobre la curva Γ mediante:

$$\int_{\Gamma} f d\ell := \int_a^b f(\vec{r}(t)) \left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\| dt$$

donde $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una parametrización regular de Γ .

Obs: Si f es una densidad lineal de masa ρ , entonces la integral de línea de ρ da como resultado la Masa

$$M = \int_{\Gamma} \rho d\ell$$

- Centro de Masa:** El centro de masa de una curva $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$, cuya densidad lineal de masa $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, se define como el punto de coordenadas

$$X_G = \frac{1}{M} \int_{\Gamma} x \rho d\ell \quad Y_G = \frac{1}{M} \int_{\Gamma} y \rho d\ell \quad Z_G = \frac{1}{M} \int_{\Gamma} z \rho d\ell$$