MA1002-4 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar Final: Curvas

21 de diciembre de 2018

P1. Encuentre alguna parametrización para las siguientes curvas

a) La parabola dada por $y = x^2, x \in [0, a]$ en sentido antihorario.

b) El segmento que une el punto $\vec{p} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ y el punto $\vec{q} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

c) El triangulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(3, 3)$.

d) La elipse dada por $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

e) La curva que se obtiene de intersectar un casquete esférico unitario y la superficie de ecuación $z^2 = x^2 + y^2$.

P2. Sea $P, Q \in \mathbb{R}^3$ y $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización arbitraria de una curva Γ con $\vec{r}(a) = P$ y $\vec{r}(b) = Q$. Probar que $L(\Gamma) \geq \|v\|$, donde $v = Q - P$, es decir el segmento entre P y Q entrega el menor camino posible. Para esto siga los siguientes pasos:

a) Considere la integral $\displaystyle\int_a^b \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \cdot v dt$ y calcule su valor.

b) Concluya utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz $u \cdot v \leq \|u\|\|v\|$

P3. Sea la curva que se forma al intersectar:

$$x^2 - y^2 = 1 \quad \text{y} \quad xtanh(z) = y$$

con $0 \leq z \leq 1$ y $x, y \geq 0$. Se pide:

a) Parametrizar la curva y calcular su longitud.

b) Encontrar su parametrización en longitud de arco.

c) Calcule el vector Tangente, Normal y Binormal.

P4. Sea una curva Γ que cumple con que existe un punto P_0 por el cual pasan todas las rectas normales de Γ. Se define $P_0 = \vec{\sigma}(s) + \phi(s)\hat{N}(s)$, donde $\vec{\sigma}(s)$ es la parametrización en longitud de arco de Γ, $(\hat{N})(s)$ es el vector normal a Γ y ϕ es una función de clase $\mathcal{C}^1$ con $\phi : [0, l_0] \to \mathbb{R}$. Demuestre que $\kappa(s) = 1$, $\tau(s)\phi(s) = 0$ y $\phi'(s) = 0$, donde $\kappa(s)$ y $\tau(s)$ son la curvatura y la torsión respectivamente. Concluya que Γ es una curva plana.

Indicación: Quizás le sea útil ocupar que $\hat{T}, \hat{N}$ y $\hat{B}$ son linealmente independientes.

Definición: (Independencia Lineal) *Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \subseteq R^n$ diremos que estos vectores son linealmente independientes si $\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i = \vec{0} \Rightarrow \lambda_i = 0, \forall i = 1, \ldots, m$*

"Es poco lo que sabemos, es mucho lo que ignoramos"
Pierre Simon Laplace

- **[Norma eucledidiana]** Sea $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, su norma euclideana es
$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_i^2 + \cdots + x_n^2}$$
- **[Curva]** $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ es una curva si existe una función continua $\vec{r} : I = [a, b] \to \mathbb{R}^n$, llamada parametrización de la curva, tal que $\Gamma = \{\vec{r}(t) : t \in [a, b]\}$.
- Una curva Γ es:
  - **Suave:** Si admite una parametrización de clase C^1.
  - **Regular:** Si admite una parametrización $\vec{r}(t)$ de clase C^1 tal que $\|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\| > 0$, $\forall t \in [a, b]$. A este tipo de parametrizaciones se les llama regular.
  - **Simple:** Si admite una parametrización de clase C^1 que sea inyectiva.
  - **Cerrada:** Si admite una parametrización $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 tal que: $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$.
  - **Cerrada simple:** Si admite una parametrización $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 tal que $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ y que sea inyectiva sobre $[a, b)$.
- **[Parametrizaciones equivalentes]** Sea $\vec{r}_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ y $\vec{r}_2 : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ dos parametrizaciones de una curva Γ. $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ son equivalentes si existe una función biyectiva $\varphi : [a, b] \to [c, d]$ de clase $\mathcal{C}^1$ tal que
$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(\varphi(t)), \forall t \in [a, b]$$
En este caso φ se llamará reparametrización.
- **[Longitud de Curva]** Sea Γ una curva simple y regular. Sea $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una parametrización regular de Γ. Definimos la longitud de Γ mediante
$$L(\Gamma) = \int_a^b \|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\| dt$$
- **[Longitud de Arco]** Sea Γ una curva simple y regular. Sea $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una parametrización regular de Γ. Definimos la función longitud de arco $s : [a, b] \to [0, L(\Gamma)]$ como
$$s(t) = \int_a^t \|\frac{d\vec{r}(\tau)}{dt}\| d\tau$$
- **[Parametrización natural]** Para obtener la parametrización natural (o de longitud de curva). Es necesario obtener la función de longitud de arco ($s(t)$) y luego desde esta relación despejar t en función s, para finalmente encontrar:
$$\vec{\sigma}(s) = \vec{r}(t(s))$$
- [Observaciones] Cualquier otra parametrización regular conduce a la misma parametrización natural solo que puede variar el sentido (dependiendo del sentido de la parametrización). También se cumple que: $\|\frac{d\sigma}{ds}\|$=1

- Sea Γ una curva simple y regular,con parametrización $\overrightarrow{r}(t)$ y parametrización natural $\sigma(s)$. Se tiene que:

	En función de s	En función de t
Velocidad $\vec{v}(t)$		$\dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}$
Rapidez $v(t)$	$\dfrac{ds}{dt}(t)$	$\left\Vert \dfrac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\Vert$
Vector Tangente T	$\dfrac{d\sigma}{ds}(s)$	$\dfrac{\vec{v}(t)}{v(t)} = \dfrac{\frac{d\vec{r}}{dt}(t)}{\Vert \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \Vert}$
Vector Normal N	$\dfrac{\frac{dT(s)}{ds}}{\Vert \frac{dT(s)}{ds} \Vert}$	$\dfrac{\frac{dT(t)}{dt}}{\Vert \frac{dT(t)}{dt} \Vert}$
Vector Binormal B	$T(s) \times N(s)$	$T(t) \times N(t)$
Curvatura κ	$\left\Vert \dfrac{dT(s)}{ds} \right\Vert$	$\left\Vert \dfrac{\frac{dT(t)}{dt}}{\frac{d\vec{r}(t)}{dt}} \right\Vert$
Radio de Curvatura R	$\dfrac{1}{k(s)}$	$\dfrac{1}{k(t)}$
Torsión τ	$-N(s) \cdot \dfrac{dB(s)}{ds}$	$-N(s) \cdot \dfrac{\frac{dB(t)}{dt}}{\Vert \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \Vert}$

  Obs: Dado una curva Γ, si $\tau = 0$ es una curva plana, por otro lado, si $\kappa = 0$ es una recta

- **Fórmulas de Frenet:** Las siguientes relaciones se tiene al estar evaluadas en la parametrización natural s.
  - $\dfrac{d\hat{T}}{ds} = k\hat{N}$
  - $\dfrac{d\hat{N}}{ds} = -k\hat{T} + \tau\hat{B}$
  - $\dfrac{d\hat{B}}{ds} = -\tau\hat{N}$

- **Integral de una función sobre una curva**: Sea Γ una curva simple y regular en $\mathbb{R}^n$, y sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua. Se define la integral de f sobre la curva Γ mediante:

$$\int_\Gamma f d\ell := \int_a^b f(\overrightarrow{r}(t)) \left\Vert \frac{d\overrightarrow{r}(t)}{dt} \right\Vert dt$$

  donde $\overrightarrow{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ es una parametrización regular de Γ.
  Obs: Si f es una densidad lineal de masa ρ, entonces la integral de linea de ρ da como resultado la Masa

$$M = \int_\Gamma \rho d\ell$$

- **Centro de Masa:** El centro de masa de una curva $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$, cuya densidad lineal de masa $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, se define como el punto de coordenadas

$$X_G = \frac{1}{M}\int_\Gamma x\rho d\ell \quad Y_G = \frac{1}{M}\int_\Gamma y\rho d\ell \quad Z_G = \frac{1}{M}\int_\Gamma z\rho d\ell$$