

MA1002-4 Cálculo Diferencial e Integral

Profesor: Leonardo Sánchez C.

Auxiliar: Marcelo Navarro

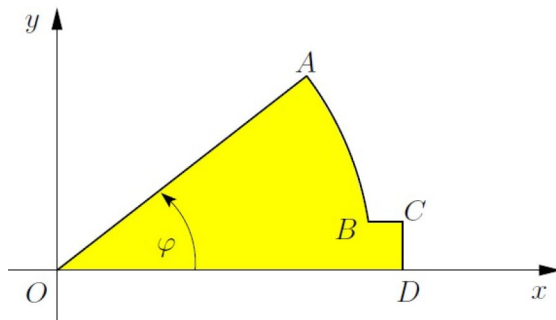


Trabajo Dirigido

13 de diciembre de 2018

P1. Sea $n \geq 1$ encuentre el centroide de la región entre $f(x) = x^n$ y la recta $x = 1$. Muestre que sucede si $n \rightarrow \infty$

P2. Un trompo se genera por la rotación en torno al eje OX de la curva $OABCD$ mostrada en la figura



OA : es un trazo recto inclinado en un ángulo φ ,

AB : es un arco de circunferencia de radio R y centro en O ,

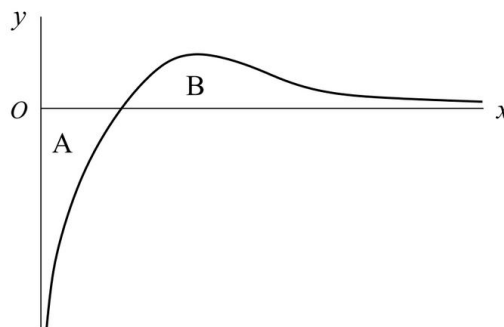
BC : es un trazo horizontal,

CD : es un trazo vertical de largo 1, ubicado en $x = R + 1$.

- Escriba, en términos de R y φ , las ecuaciones de las funciones que definen los tramos OA , AB y BC de la curva y encuentre las coordenadas de los puntos A, B y C .
- Encuentre el área total de la superficie exterior del trompo.

P3. Probar que el área encerrada por los $2n$ lazos de $r = a \sin(n\theta)$, con n par es independiente de n . ¿Que sucede para el caso de n impar?

P4. Sea $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}$ (ver figura). Probar que las áreas de A y B son finitas e iguales. Indicación: para probar la igualdad, use el cambio de variables $y = 1/x$.



P5. Considere la integral impropia $\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx$

- Demuestre que la integral es absolutamente convergente.
- Concluya que la integral $\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx$ también lo es.

P6. Sea f una función de clase C^2 en $[0, 1]$, verificando que $f(0) = 0$. Demuestre que la integral:

$$\int_0^1 f(x)x^{-\frac{3}{2}}dx$$

Converge

P7. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{x-e^x} dx$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4}$

P8. Considere la serie de potencias

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k! (k-1)!} x^k$$

Muestre que $\phi(x)$ tiene radio de convergencia infinito. Argumente por qué entonces ϕ es de clase C^2 y pruebe que satisface la siguiente ecuación integral-diferencial:

$$\int_0^x \phi(t) dt = 2x\phi'(x) - 2\phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

P9. Considere la serie de potencias $f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{ne^n}$

a) Calcule el radio de convergencia y el intervalo de convergencia

b) Demuestre que $f'(x) = \frac{1}{e-x}$

c) Determine $f(x)$ y utilícelo para calcular $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n2^n}$