MA1002-4 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar 12: Extra

11 de diciembre de 2018

P1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en su dominio. Llamaremos *valor principal* de la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ a:

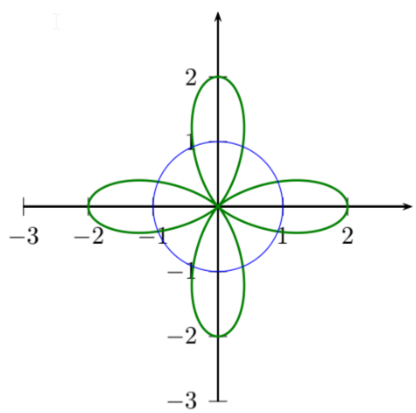
$$VP \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to\infty} \int_{a}^{a} f(x)dx$$

a) Demuestre que si $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ es convergente, entonces la integral doblemente impropia es igual a su valor principal

b) De un ejemplo en que un valor principal exista, pero que la integral diverge.

P2. Estudie la convergencia de la integral impropia $\int_{1}^{\infty} \frac{e^x}{x^x}dx$

P3. Encuentre el área interior a la rosa de 4 pétalos $r = 1 + cos(4\theta)$ y exterior al circulo $r = 1$



P4. Sea $x \in \mathbb{R}$, considere la serie de potencias $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n x^n}{(n+1)^2}$. Determine el radio e intervalo de convergencia

P5. Encontrar la serie de potencias de $f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$ y determine su intervalo de convergencia

"Diferencial se pasa en el examen"
Bernhard Riemann

Recuerdo:

- **[Series de Potencias]**: Una serie de potencias es una serie de la forma: $\sum_{k=0} a_k(x-\alpha)^k$, para este curso estudiaremos el caso de $\alpha = 0$.
- **[Radio de convergencia]**: Se define el radio de convergencia R como

$$R = \sup\{x_0 : \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k < \infty\}$$

- **[Intervalo de convergencia]**: Se llama intervalo de convergencia al intervalo I tal que $\forall x \in I$ la serie de potencias converge, se debe cumplir que $(-R, R) \subseteq I \subseteq [-R, R]$.

  Por lo que para calcular el intervalo de convergencia I se necesita encontrar R, con esto garantizamos que I a lo menos será el intervalo abierto $(-R, R)$, luego se estudia la frontera, es decir, se estudia si la serie converge para $x = R$ o $x = -R$, en caso de converger en alguno de estos valores, se añadirá al intervalo $(-R, R)$, de esta forma se corrobora que $(-R, R) \subseteq I \subseteq [-R, R]$.
- Para calcular el radio de convergencia de una serie de potencias de la forma $\sum_{k\geq n_0} a_n x^n$ existe las siguientes tres formas (todas entregaran el mismo valor si existe), cual usar dependerá del ejercicio.

  1) $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$
  2) $L = \lim_{n\to\infty} (|a_n|)^{\frac{1}{n}}$
  3) $L = \lim_{n\to\infty} sup_{k\geq n}(|a_n|)^{\frac{1}{n}}$

  En caso de existir L se tiene que el radio de convergencia es: $R = \frac{1}{L}$
- Dada una serie de potencias $\sum a_k x^k$ con intervalo de convergencia I , definimos:

$$f(x) = \sum a_k x^k$$

  Esta función es continua, derivable e integrable. Más aún las integrales y derivadas son término a término, esto es que la derivada o la integral la pueden “pasar”para dentro de la serie
- Dadas dos series de potencias $\sum a_k x^k$ y $\sum b_k x^k$ convergentes para x_0. Entonces la serie $\sum(a_k + b_k)x^k$ converge para todo $x \in (-|x_0|, |x_0|)$ y se tiene que $\sum(a_k+b_k)x^k = \sum a_k x^k + \sum b_k x^k$. Además si $c_k \sum_{j=1}^{k} a_j b_{k-j}$, la serie $\sum c_k x^k$ converge para todo $x \in (-|x_0|, |x_0|)$ y se tiene que $\sum c_k x^k = (\sum a_k x^k)(\sum b_k x^k)$.
- Aprenderse $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ para $|x| < 1$ y sus variantes y traslaciones como:
  - $f(-x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$ para $|x| < 1$
  - $f(x-1) = \frac{1}{1-(x-1)} = \frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^n$ para $|x-1| < 1$

  Y ocupar derivadas e integrales para calcular otras funciones (por ejemplo logaritmos).