

Auxiliar 14: Series

P1 a) La serie $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots$ tiene como

$$\text{Suma parcial } S_n = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} \quad a_k$$

Suma parcial es hasta n -terminos

$$\text{Luego la serie se escribe como } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

pdg: la serie converge

Tenemos 2 opciones → 1) demostrar convergencia usando un criterio
→ 2) Calcular la serie y probar que da un número finito

Usamos 1) idea: como hay factoriales ocuparemos $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ } criterio del cociente

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{(n+2)!}}{\frac{n}{(n+1)!}} = \frac{n+1}{n(n+2)} = 0 < 1$$

Luego la serie converge

Calculemos:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} \stackrel{\text{N:KITA}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{(n+1)!} \rightarrow 0 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Obs: Como es finito converge

b) 1) $\sum_{n \geq 1} \frac{\text{Sen}(n^2)}{\sqrt{n^4+4}}$ veamos conv absoluta (ya que hay un $\text{Sen}(n^2)$)

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \geq 1} \left| \frac{\text{Sen}(n^2)}{\sqrt{n^4+4}} \right| &\leq \sum_{n \geq 1} \frac{|\text{Sen}(n^2)|}{\sqrt{n^4+4}} \leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n^4+4}} \leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n^4}} \\
 &= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} < +\infty \\
 &\quad \text{Converge}
 \end{aligned}$$

$\therefore \sum_{n \geq 1} \frac{\text{Sen}(n^2)}{\sqrt{n^4+4}}$ converge absolutamente
 $\Rightarrow$ converge condicionalmente

Recuerda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < +\infty$ si $p > 1$ (como en las integrales) impropias

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

veamos conv absoluta

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n+1} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

Racionalizar

$$\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$$

Armonica

$$\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(n+1)}$$

$$\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(n+1)} > +\infty$$

Luego $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n+1} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})|$ diverge

Ahora conv. Condicional

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

↑
alterna

↘ falta ver que es decreciente a 0
Para ocupar Leibnitz:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

hay que probar que $a_{n+1} < a_n$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}$$
$$< \frac{2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}$$

$$< \frac{2\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n+1}} = 1$$

Luego $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Leftrightarrow a_{n+1} < a_n \Leftrightarrow$ decreciente

Luego por criterio de Leibnitz converge

$$c) \text{ pda } \sum_{n=1}^{\infty} g\left(\frac{1}{n}\right) < +\infty \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{g(x)}{x^2} dx < +\infty$$

notemos que g es creciente y $\frac{1}{x}$ es decreciente

$\Rightarrow g\left(\frac{1}{x}\right)$ es decreciente.

obs si g fuera diferenciable basta ver que

$$\left(\frac{dg\left(\frac{1}{x}\right)}{dx}\right) < 0 \Rightarrow \frac{dg\left(\frac{1}{x}\right)}{dx} = \underbrace{g'\left(\frac{1}{x}\right)}_{\substack{\text{g creciente} \\ \Rightarrow g' > 0}} \cdot \frac{-1}{x^2} < 0$$

< 0

Positivo

Además g es positivo ya que $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$

Luego podemos ocupar el criterio de la integral

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} g\left(\frac{1}{n}\right) \text{ converge} \Leftrightarrow \int_1^{\infty} g\left(\frac{1}{x}\right) dx \text{ converge}$$

Ademas ocupando cambio de variable sobre la integral

$$\text{Usando } u = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{u} \Rightarrow \begin{array}{l} x \rightarrow 1 \Rightarrow u \rightarrow 1 \\ x \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow 0 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$dx = -\frac{1}{u^2} du$$

Luego $\int_1^{\infty} g\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_1^0 g\left(\frac{1}{u}\right) du = \int_0^1 \frac{g(u)}{u^2} du$

Luego como $\int_1^{\infty} g\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_0^1 \frac{g(x)}{x^2} dx$

Se concluye que

$\sum g\left(\frac{1}{n}\right) < +\infty \stackrel{\text{criterio integral}}{\Leftrightarrow} \int_1^{\infty} g\left(\frac{1}{x}\right) dx < +\infty \stackrel{\text{Cambio de variable}}{\Leftrightarrow} \int_0^1 \frac{g(x)}{x^2} dx < +\infty$

P2 a) $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$

usamos $\ln(x) \leq x - 1 \quad \forall x > 0$

$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \leq \sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n^2} - 1\right) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} < +\infty$

$\therefore$ converge

b) $\sum_{n \geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

hay factoriales usamos $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^2 \cdot \frac{2n!}{(2n+2)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)^2 \cdot \frac{1}{(2n+2)(2n+1)}$

Luego $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{4n^2 + 12n + 2}$

$$= \frac{1}{4} < 1$$

Converge

c) $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n+1}}$

notemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n+1}} \rightarrow \infty \Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n+1}}$ diverge

obs: ocupe la contrareciproca de

si $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge $\Rightarrow a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

d) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

usamos comparación por cociente
con $b_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{n(n+1)}{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = 1 > 0$$

Luego $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ se comporta igual $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$

DIVERGE!!!!

e) $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^p}$ — positiva, decreciente a 0
criterio de la integral

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^p} < +\infty \Leftrightarrow \int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln(x))^p} dx < +\infty \quad \begin{array}{l} u = \ln(x) \\ du = \frac{1}{x} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \int_{\ln(2)}^{\infty} \frac{du}{u^p} < +\infty$$

Luego $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^p}$ converge si $p > 1$
diverge si $p \leq 1$

f) $\cos(\pi n) = (-1)^n$

$$\sum_{n \geq 1} \cos(\pi n) \arctan\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \sum_{n \geq 1} (-1)^n \arctan\left(\frac{1}{2n+1}\right)$$

notar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \arctan\left(\frac{1}{2n+1}\right) \Rightarrow \arctan(0) = 0$

$$\frac{d}{dx} \arctan\left(\frac{1}{2x+1}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2x+1}\right)^2} \cdot -1 \cdot 2(2x+1)^{-2} < 0$$

decreciente a 0

Luego por Leibnitz converge $\square$

P3 determinar $\alpha \in \mathbb{R}$ para que Converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{n^{n\alpha}}$$

usamos criterio de Cociente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{(n+1)!}}{(n+1)^{(n+1)\alpha}}}{\frac{\sqrt{n!}}{n^{n\alpha}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)^{n\alpha} \cdot (n+1)^{\alpha}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{1/2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n\alpha} (n+1)^{\alpha}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{1/2 - \alpha}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n\alpha}} \rightarrow \begin{matrix} \text{depende} \\ e^{\alpha} \end{matrix}$$

si $\alpha < \frac{1}{2} \Rightarrow (n+1)^{1/2 - \alpha} \rightarrow \infty \Rightarrow r = \infty > 1$
la serie diverge

si $\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow r = \frac{1}{e^{1/2}} < 1 \Rightarrow$ Converge

si $\alpha > \frac{1}{2} \Rightarrow r = 0 < 1 \Rightarrow$ Converge

[P4]

pdg $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge, usemos Comparación por cociente con la serie que sabemos que converge

$$\text{Notemos que } \sum \frac{a_n}{a_{n+1}} < +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - 1}{a_{n+1}} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{a_{n+1}} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{n+1}} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad !$$

importante

$$b_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

Comparamos $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{a_n}{a_{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = 1 > 0$

$$\text{Luego } \sum a_n < +\infty \Leftrightarrow \sum \frac{a_n}{a_{n+1}} < +\infty$$

$$\therefore \sum a_n \text{ converge}$$