


MA1002-4 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Leonardo Sánchez C.

Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar 11: Series

7 de diciembre de 2018

P1. [Malla vieja - Control 6 - 2004]

a) Dada la serie $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots$ se pide escribir su suma parcial s_n , demostrar que la serie converge y calcular su valor.

b) Estudie la convergencia absoluta y condicional de las series

$$1) \sum_{n \geq 1} \frac{\operatorname{sen}(n^2)}{\sqrt{n^4 + 4}}$$

$$2) \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

c) Sea $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ continua y creciente en $[0, 1]$, con $g(0) = 0$.

Pruebe que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} g\left(\frac{1}{n}\right)$ converge si y solo si la integral $\int_0^1 \frac{g(x)}{x^2} dx$ converge.

P2. Estudie la convergencia de las siguientes series

$$a) \sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$c) \sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{\sqrt[n]{n+1}}$$

$$e) \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^p}$$

$$b) \sum_{n \geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$d) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

$$f) \sum_{n \geq 1} \cos(n\pi) \arctan\left(\frac{1}{2n+1}\right)$$

P3. Determine para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{n^{n\alpha}}$ converge

P4. Sea (a_n) una sucesión de términos positivos. Demuestre que si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ converge, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge.}$$

“No one shall expel us from the paradise which Cantor has created for us.”

David Hilbert

Recuerdo:

- Una sucesión (x_n) se dirá de Cauchy si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N, |x_n - x_m| < \varepsilon$$

- Una sucesión es convergente si y sólo si es de Cauchy.
- Sea (a_n) una sucesión. Luego $\sum a_k$ converge si y sólo si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N, m > n \implies \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \varepsilon$$

- Si $\sum a_k$ converge, entonces $a_n \rightarrow 0$.
- Sean $\sum a_k$ y $\sum b_k$ dos series convergentes y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces la siguiente suma converge:

$$\sum (a_k + \lambda b_k) = \sum a_k + \lambda \sum b_k$$

- Una serie de términos no negativos converge si y sólo si las sumas parciales son acotadas superiormente.
- Comparación:** Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones no negativas de manera que existe n_0 y $\alpha > 0$ tales que, para todo $n \geq n_0$, $a_n \leq \alpha b_n$. Se tiene que si $\sum b_k < \infty$, entonces $\sum a_k < \infty$.
- Comparación por Cuociente:** Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones positivas tales que $c = \lim \frac{a_n}{b_n}$ existe.
 - Si $c = 0$ y $\sum b_k$ converge, entonces $\sum a_k$ converge.
 - Si $c > 0$, $\sum b_k$ converge si y sólo si $\sum a_k$ converge.
- Criterio del Cuociente:** Sea (a_n) una sucesión tal que $r = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ existe.

- Si $r < 1$ entonces $\sum a_k$ converge.
- Si $r > 1$ entonces $\sum a_k$ diverge.
- Si $r = 1$ no se sabe.

- Criterio de la Raíz:** Sea (a_n) una sucesión de términos no negativos tal que $r = \lim (a_n)^{1/n}$ existe.

- Si $r < 1$ entonces $\sum a_k$ converge.
- Si $r > 1$ entonces $\sum a_k$ diverge.
- Si $r = 1$ no se sabe.

Obs: En este criterio se puede reemplazar r por $r = \limsup_n a_n = \lim_n \sup \{a_k : k \geq n\}$

- Criterio de la Integral:** Sea $k \in \mathbb{N}$ y $f : [k, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ una función decreciente. Se tiene que $\sum_{n \geq k} f(n)$ converge si y sólo si $\int_k^\infty f(x) dx$ converge.
- Sea (a_k) una sucesión. Diremos que $\sum a_k$ es absolutamente convergente si $\sum |a_k|$ converge.
- Toda serie absolutamente convergente es convergente. Además una serie es absolutamente convergente si y sólo si la series de sus términos negativos y la de sus términos positivos convergen.
- Si una serie converge, pero no converge absolutamente se le dirá condicionalmente convergente.
- Criterio de Leibnitz:** Sea (a_n) una sucesión decreciente tal que $a_n \rightarrow 0$. Entonces $\sum (-1)^n a_n$ es convergente.
- Sea (a_k) una sucesión. Si $\sum |a_k|$ converge, luego cualquier reenumeración (b_k) verifica que $\sum b_k = \sum a_k$ converge.
- Sea (a_k) tal que $\sum a_k$ es condicionalmente convergente. Luego para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ existe una reenumeración b_n tal que $\sum b_k = \alpha$.
- Sean $\sum a_k$ y $\sum b_k$ dos series absolutamente convergentes, entonces su producto es $\sum c_k$, donde (c_k) es cualquier sucesión que contiene exactamente una vez cada producto posible. En particular podemos tomar $c_k = \sum_{l=0}^k a_l b_{k-l}$.