

Auxiliar 10

P1 Vamos a calcular directamente $\int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} dx$, notar que es 2da especie

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} dx$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{2} \cdot \frac{du}{u^{3/2}}$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_1^b \frac{du}{u^{3/2}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{-\frac{3}{2}+1} u^{-\frac{3}{2}+1} \right]_1^b$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left[-2 u^{-\frac{1}{2}} \right]_1^b$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{-2}{\sqrt{b}} - (-2) \right)$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{\sqrt{b}} + 1 \right) = 1$$

P2 a) $\int_0^1 \ln(x) dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \ln(x) dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} (x \ln(x) - x) \Big|_a^1$

2da especie, notar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[-1 - (a \ln(a) - a) \right]$$

$$= -1, \text{ Converge}$$

$$b) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x \ln^p(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u^p} du$$

$$u = \ln(x) \begin{cases} x \rightarrow 0^+ \\ \Rightarrow u \rightarrow -\infty \\ x \rightarrow \infty \\ \Rightarrow u \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$du = \frac{dx}{x}$$

1^{era} especie ya que $b \rightarrow \infty$
y 2^{da} especie ya que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left| \frac{1}{x \ln^p(x)} \right| \rightarrow \infty$$

Mixta

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} \frac{du}{u^p}}_{1^{era}} + \underbrace{\int_{-1}^0 \frac{du}{u^p}}_{2^{da}} + \underbrace{\int_0^1 \frac{du}{u^p}}_{2^{da}} + \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{du}{u^p}}_{1^{era}}$$

	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
Diverge Si	$p \leq 1$	$p \geq 1$	$p \geq 1$	$p \leq 1$

Luego, da lo mismo que valor sea $p > 0$
Siempre hay algo que diverge

$$c) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x(x+\sqrt{x})} = \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{x(x+\sqrt{x})}}_I + \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(x+\sqrt{x})}}_J$$

En vez de
L al separar
puede ser $a > 0$

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x(x+\sqrt{x})} \geq \int_0^1 \frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt{x})} = \int_0^1 \frac{dx}{2x\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{dx}{2x^{3/2}} > +\infty$$

Lo anterior diverge ya que es de tipo p , con $p > 1$ de 2^{da} especie.

Luego, da lo mismo lo que pase con J , $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x(x+\sqrt{x})}$ diverge
Esto debido a que $\frac{1}{x(x+\sqrt{x})} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

d) $\int_0^{\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2} dx \sim$ Mixta, vea por qué

$$= \underbrace{\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x^2} dx}_I + \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2} dx}_J$$

$I = \int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x^2} dx$, usare criterio del cociente

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\arctan(x)}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = 1 \neq 0$$

luego $\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x^2} dx$ y $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ se comportan igual

luego como I diverge $\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2} dx$ diverge ^{¿por?}

e) $\int_0^{\infty} \frac{\arctan(x)}{x^{3/2}} dx \sim$ Mixta, igual que la anterior

$$= \underbrace{\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x^{3/2}} dx}_I + \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{\arctan(x)}{x^{3/2}} dx}_J$$

I por cociente con $\frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\arctan(x)}{x^{3/2}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1 \neq 0$

Luego $\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x} dx$ converge ya que $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

(ya que por criterio del cociente se comportan igual)

Ahora veamos si J converge

$J = \int_1^{\infty} \frac{\arctan(x)}{x^{3/2}} dx$, lo comparare por cociente con $\frac{1}{x^{3/2}}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\arctan(x)}{x^{3/2}}}{\frac{1}{x^{3/2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \neq 0$$

Luego $\int_1^{\infty} \frac{\arctan(x)}{x^{3/2}} dx$ converge ya que $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx$ converge

por ser integral de tipo "p" con $p > 1$ (de 1era especie)

Luego como I y J convergen

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\arctan(x)}{x^{3/2}} dx \text{ converge}$$

1) $\int_0^1 \frac{\sin(2x)}{x^{3/2}} dx$ propuesto, Compara con $\frac{1}{\sqrt{x}}$

2) $\int_0^{\infty} e^{-x} \sin(x) dx$, veremos Convergencia absoluta

notemos que $\int_0^{\infty} |e^{-x} \sin(x)| dx \leq \int_0^{\infty} e^{-x}$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} -e^{-x} \Big|_0^b$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} (-e^{-b} + 1) = 1 < +\infty$$

luego $\int_0^{\infty} e^{-x} \sin(x) dx$ Converge absolutamente

$\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-x} \sin(x) dx$ Converge

P3 c) Como f es decreciente $\Leftrightarrow f'(x) < 0 \quad \forall x > 0$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} |f'(x)| dx = \int_0^{\infty} -f'(x) dx$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} -f(x) \Big|_0^b$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} -f(x) + f(0) \quad \text{finito por ser continua}$$

$$< +\infty$$

por lo tanto converge

$$\boxed{P4} \quad V = \pi \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx < +\infty$$

↳ 1ª especie, tipo P con $p > 1$

$$S = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx$$

$$\geq 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = 2\pi \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(b) - 0 > +\infty$$

Luego Volumen Converge pero S diverge

$\boxed{P5}$ a) lo haremos por contradicción, si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l > 0$

$\Rightarrow \exists x_0 > 0$ tal que $\forall x \geq x_0 \quad f(x) \geq w > 0$, con w por ejemplo $w = \frac{l}{2}$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} f(x) dx = \underbrace{\int_0^w f(x) dx}_{\text{Riemann integrable}} + \int_w^{\infty} f(x) dx \geq \int_0^w f(x) dx + \int_w^{\infty} \frac{l}{2} dx$$

Riemann integrable
 $\Rightarrow$ converge, finito

$$> C + \infty = \infty$$

Luego diverge $\Rightarrow \Leftarrow$

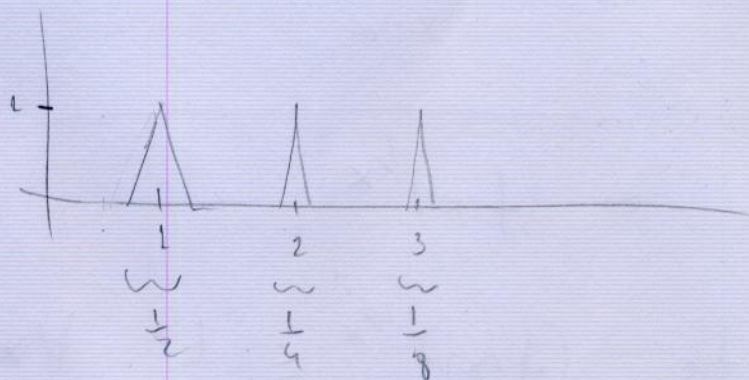
Contradicción, ya que por hipótesis $\int_0^{\infty} f(x) dx$ converge

Ahora si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l < 0$ es análogo.

$$\therefore \int_0^{\infty} f(x) dx < +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

+ existe $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

b) Notemos que f es



$$\Rightarrow \int_0^{\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \text{base} \cdot \text{altura} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{2} \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2} - 1} \right] \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = 1$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ finito}$$

Pero el limite no existe ya que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \sim$$



Luego $\int_0^{\infty} f(x) dx < \infty \not\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

P6 ocuparemos el limite en $(f(x))^{1/x}$

$$\Rightarrow \exists x_0 > 0, \exists a > 1 \text{ tal que } (f(x))^{1/x} \leq \frac{1}{a} \quad \forall x \geq x_0$$

$$\Rightarrow f(x) \leq \left(\frac{1}{a}\right)^x \quad \forall x \geq x_0$$

Luego $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ es decreciente, entonces

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{a^x} dx \text{ converge} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=\lceil x_0 \rceil}^n \frac{1}{a^k} \text{ converge}$$

y sabemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=\lceil x_0 \rceil}^n \frac{1}{a^k} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{a^k}$

(Agregue terminos por eso la suma crece)

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} < +\infty$$

Luego $\sum_{k=\lceil x_0 \rceil}^{\infty} \frac{1}{a^k} \text{ converge} \Rightarrow \int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{a^x} dx \text{ converge}$

$$\Rightarrow \text{Como } f(x) \leq \left(\frac{1}{a}\right)^x$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{\infty} f(x) \leq \int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{a} x < +\infty$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{\infty} f(x) dx \text{ Converge}$$

Luego

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \int_0^{[x_0]} f(x) dx + \int_{[x_0]}^{\infty} f(x) dx$$

$\downarrow$ finito por Riemann $\downarrow$ Converge

$$< +\infty$$

$$\therefore \int_0^{\infty} f(x) dx \text{ Converge}$$