MA1002-4 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar 10: Integrales Impropias

30 de noviembre de 2018

Recuerdo:

- **Primera Especie:** Sea $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ diremos que f es integrable en $[a, \infty)$ si se cumple:
  1. $\forall x \in (a, \infty)$, f es integrable en $[a, x]$.
  2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_a^x f$ existe.

  En caso de que lo anterior exista denotaremos $\int_a^{+\infty} f = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_a^x f$.
- Si el límite anterior existe diremos que la integral impropia es convergente y si no diremos que es divergente.
- De manera análoga se define $\int_{-\infty}^{b}$ y
$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^{c} f + \int_{c}^{\infty}$$
  Donde para que la integral de la izquierda converja deben converger las de la izquierda.
- Dado $a > 0$. Luego $\int_a^\infty \frac{dx}{x^s}$ converge si y sólo si $s > 1$.
- **Segunda Especie:** Sea $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ no acotada, diremos que f es integrable en $[a, b)$ si se cumple:
  1. $\forall x \in (a, b)$, f es integrable en $[a, x]$.
  2. $\lim\limits_{x \to b^-} \int_a^x f$ existe.

  En caso de que lo anterior exista denotaremos $\int_a^{b} f = \lim\limits_{x \to b^-} \int_a^x f$.
- Dado $a < b$. Luego $\int_a^b \frac{dx}{(x-b)^s}$ converge si y sólo si $s < 1$.
- **Mixtas:** Estas integrales convergen si cada una de las integrales en las que se separan (de primera o segunda especie converge)
- **Criterio de Convergencia 1:**

  Sean g, f continuas tal que $0 \leq g(x) \leq f(x)$ a partir de $x_0 \geq a$. Luego si $\int_a^\infty g$ converge, entonces $\int_a^\infty f$ converge, de manera recíproca si $\int_a^\infty f$ diverge $\int_a^\infty g$ también.
- **Criterio de Convergencia 2:**

  Sean f, g continuas tal que:
$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$$
  Luego si $\int_a^\infty g$ y $\int_a^\infty f$ convergen o divergen juntas.

  Obs: Los criterios de convergencia anteriores sirven también para integrales de segunda especie, reemplazando ∞ por b^-.
- Diremos que $\int_a^\infty f$ es absolutamente convergente si $\int_a^\infty |f|$ converge.
- Si $\int_a^\infty |f|$ converge, entonces $\int_a^\infty f$ converge.

P1. Calcule, si es que existe, el área de bajo la curva
$$f(x) = \frac{x}{(1 + x^2)^{3/2}}$$
En el primer cuadrante.

P2. Determine si las siguientes integrales son o no convergentes.

a) $\displaystyle\int_0^1 ln(x)dx$

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{xln^p(x)}$ $,p>0$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x(x+\sqrt{x})}$

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{arctan(x)}{x^2}dx$

e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{arctan(x)}{x^{3/2}}dx$

f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{sen(2x)}{x^{3/2}}dx$

g) $\int_0^\infty e^{-x}sen(x)dx$

P3. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función decreciente y derivable en $\mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$

a) Pruebe que $\displaystyle\int_0^\infty |f'(x)|dx$ converge.

b) **[Propuesto]** Pruebe que $\displaystyle\int_0^\infty f(x)sen(3x)dx$ converge
hint: por partes.

P4. Considere la función $f(x)=\frac{1}{x}$, con $x\in[1,\infty)$. Demuestre que el volumen del solido de revolución en torno al eje OX es finito, mientras que su manto es infinito.

P5. En esta pregunta estudiaremos si ocurre que $\int_0^\infty f(x)dx$ converge $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$

a) Sea $f:[0,\infty]\to\mathbb{R}$ una función tal que $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe. Demuestre que $\int_0^\infty f(x)dx$ converge entonces $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$

b) Considere una función $f:[0,\infty]\to\mathbb{R}$ tal que en cada $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ se levanta un triangulo isósceles de altura 1 y base $(1/2)^n$. Pruebe que $\int_0^\infty f(x)dx$ converge, pero $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\neq 0$

Indicación: Escriba la integral como una suma de áreas de triángulos, este paso no necesita justificarlo.

P6. Sea $p\in(0,1)$ y $f:[1,\infty]\to\mathbb{R}^+$ una función continua tal que

$$\lim_{x\to\infty}(f(x))^{\frac{1}{x}}=p$$

Demuestre que $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ converge.

Indicación: Si $\lim\limits_{x\to\infty}\phi(x)<1$, entonces $\exists x_0, a>1$ tal que $\phi(x)\leq 1/a, \forall x\geq x_0$.

Indicación 2: **Criterio de la Integral:** Sea $k\in\mathbb{N}$ y $f:[k,\infty)\to\mathbb{R}_+$ una función decreciente. Se tiene que $\sum\limits_{n\geq k} f(n)$ converge si y sólo si $\int_k^\infty f(x)dx$ converge.