MA1002-4 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar 9: Aplicaciones de la Integral II

23 de noviembre de 2018

- Sea $f \in \mathcal{C}^1$, se tiene que la longitud de la curva f entre a y b, esta dada por la fórmula:

$$L_a^b(f) = \int_a^b \sqrt{1 + |f'(x)|^2} dx$$

- Sea $f \in \mathcal{C}^1$, el área del manto generado por la rotación en torno al eje OX de f entre a y b es:

$$S_{OX}(f) = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + |f'(x)|^2} dx$$

- **Área en coordenadas polares:** Sea $\rho : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^+$ una función integrable, con $\beta - \alpha \leq 2\pi$ y que define una curva en coordenadas polares $\rho = \rho(\theta)$, entonces el área de la región $R = \{(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) : \theta \in [\alpha, \beta], \rho \in [0, \rho(\theta)]\}$ está dada por:

$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho(\theta)^2 d\theta$$

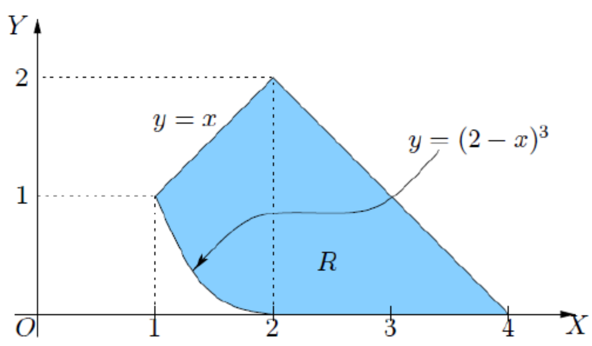
- **Centro de gravedad:** Sea R la región encerrada bajo el gráfico de una función no negativa e integrable. Es decir $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in [a, b], y \in [0, f(x)]\}$

El centro de gravedad de R esta dado por

$$X_G = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}, \quad Y_G = \frac{\int_a^b \frac{f^2(x)}{2}dx}{\int_a^b f(x)dx}$$

P1. *a)* Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$ y la longitud de la curva $y = f(x)$ entre 0 y x es igual a $x^2 + 2x - f(x)$. Determine $f(x)$.

b) Considere la región de la figura



Calcule el área del manto generado al rotar la figura en torno al eje x

P2. Dibuje las siguientes curvas considerando $r = r(\theta)$

a) $r = 2$

b) $r^2 - r - 12 = 0$

c) $\theta = \frac{\pi}{6}$

d) $r = \frac{\theta}{2\pi}$

e) $r = tan(\theta)sec(\theta)$

f) $r = 2cos(\theta)$

g) $r = sen(2\theta)$

h) $r = 1 + 2sin(\theta)$

P3. *a*) Calcule el area que encierra la curva $\rho(\theta) = sen(2\theta)$.

b) Calcule el area encerrada entre las curvas $\rho_1(\theta) = sen(\theta)$ y $\rho_2(\theta) = 1 + cos(\theta)$

P4. Considere la curva definida en coordenadas polares por la relación $\rho = exp(-\theta)$ (espiral). Demuestre que el área polar encerrada por esta curva en la n-ésima vuelta, es decir donde $\theta \in [2(n-1)\pi, 2n\pi]$, es igual a $exp(-4(n-1)\pi)$-veces el área encerrada en la primera vuelta.

P5. [**Propuesto**] Se tiene una región fija de área A (generada a partir del área bajo la curva de una función f). Demuestre que el volumen de revolución en torno al eje OY y en torno al eje OX se calculan respectivamente como:

$$V_{OY} = 2\pi \cdot A \cdot X_G \qquad \text{y} \qquad V_{OX} = 2\pi \cdot A \cdot Y_G$$

Donde X_G y Y_G son las coordenadas del centro de masa de la región A

P6. [**Propuesto 2**] Para $r > 0$ se define la región $\mathcal{R}$ por:

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2,\ x^2 + y^2 - 2ry \geq 0,\ y \geq 0\}$$

Calcule la superficie del sólido engendrado al rotar la región $\mathcal{R}$ en torno al eje OX.