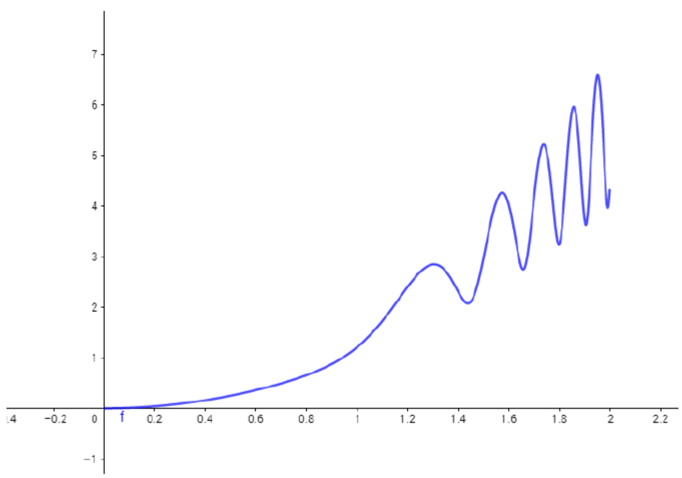
MA1002-4 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar 8: Aplicaciones de la Integral

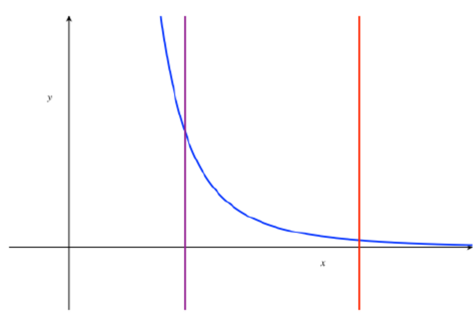
16 de noviembre de 2018

P1. Considere la función $f(x) = 2x - x^2$. Llamaremos R a la región comprendida entre la curva y el eje x en la región positiva de f. Encuentre el punto $(x_0, f(x_0))$ tal que al trazar la recta desde el origen hacia él, divida la región R en dos partes de igual área.

P2. Considere la función $f(x) = x^2\sqrt{2 - \cos(x^5)}$ Determine el volumen de la región formada al rotar la región encerrada entre 0 y 2 y la recta $y = 0$.



P3. Sea $V(b)$ el volumen del sólido obtenido al rotar con respecto al eje x la región contenida entre la curva $y = x^{-3}$ y el eje x, desde $x = 1$ hasta $x = b$.



Analice el comportamiento de $V(b)$ a medida que $b \to \infty$.

P4. Considere las funciones $f(x) = sen(x)$ y $g(x) = \pi x - x^2$ definidas para $x \in [0, \pi]$

- Demuestre que $\forall x \in [0, \pi], g(x) \geq f(x)$
  Hint: verifique que $g(x) - f(x)$ es cóncava y concluya

- Para la región R del primer cuadrante definida por

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,\pi] \wedge y \in [f(x), g(x)]\}$$

Se pide calcular el área de R y calcular los volúmenes de los solidos engendrados por la rotación de R en torno al eje OX y en torno al eje OY.

hint: recuerde que $sen^2(x) = \dfrac{1 - cos(2x)}{2}$

P5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$ en todo su dominio. Para $a < b \ \in \mathbb{R}$ tales que $f(a) = f(b) = 0$ y $\displaystyle\int_a^b f^2(x)dx = 1$ demuestre que

$$\int_a^b xf(x)f'(x)dx = -\frac{1}{2}$$

P6. Se dice que una función es T-periódica si $\forall x \ \ f(x+T) = f(x)$.

a) Si f es una función T-periódica integrable en $[0,T]$, demuestre que $\forall a \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^T f(x)dx = \int_a^{a+T} f(x)dx$$

b) Suponga que f es una función cuya derivada es T-periódica. Demuestre que f es T-periódica si y sólo si $f(0) = f(T)$.

c) Encuentre un ejemplo de función no periódica, y cuya derivada si lo sea.

- Considere la región o área plana

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

- **[Rotación eje *OX* - Método del disco]**

Dada la región R el volumen generado al hacer rotar R en torno al eje OX será:

$$V = \int_a^b A(x) = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Notar que esto viene a partir de sumar volúmenes de cilindros o discos de altura infinitesimalmente pequeña, cuya formula es

$$V_{cilindro} = \pi r^2 h$$

Donde cada disco tiene $r = f(x)$ y $h = dx$.

- **[Rotación eje *OY* - Método de la cáscara]** Dada la región R, le agregamos la reestricción de que $0 \leq a < b$. El volumen generado al hacer rotar R en torno al eje OY será:

$$V = \int_a^b A(x) = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$$

Notar que esto viene a partir de sumar cilindros huecos, los cuales se calculan de la siguiente forma.

Dada el área sin tapas del cilindro, que se denomina área superficial de formula

$$A_{superficial} = 2\pi rh$$

Si la multiplicamos por una profundidad infinitesimal dx, obtendremos el volumen de un cilindro hueco. Notamos que r es la distancia del eje de giro hasta el cilindro hueco.

Por lo que reconocemos como $r = x$ (si el eje de giro es el eje OY) y $h = f(x)$.

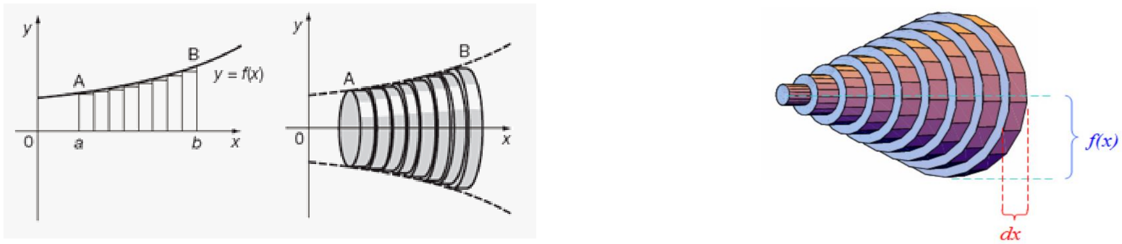


Figura 1: Construcción método del disco

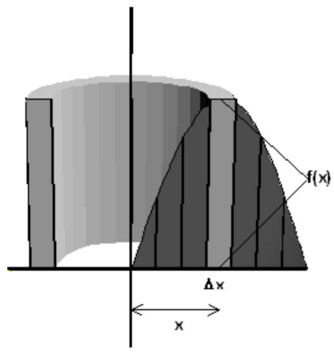


Figura 2: Construcción método de las cascaras