

MA1002-6 Cálculo Diferencial e Integral

Profesor: Leonardo Sánchez C.

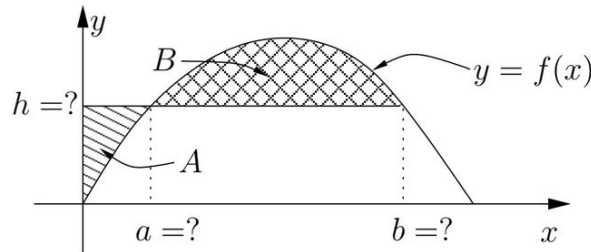
Auxiliar: Marcelo Navarro



Auxiliar 9: Aplicaciones de la Integral I

16 de octubre de 2017

P1. Dada $f(x) = 2x - 3x^3$, determinar la altura de una recta horizontal h para que las áreas de A y B de la figura sean iguales.



P2. Hallar el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar en torno al eje OY , la región encerrada por las curvas $y = 3x^2$, $y = 16 - x^2$ y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

P3. [P3 - Control 2 - 2014-2]

- a) Considere la función f definida por $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, con $f(x) \geq 0$
- 1) Calcule el área de la región limitada por la curva $f(x)$, el eje OX y los ceros de f .
 - 2) Calcule el volumen del sólido generado por la revolución en torno al eje OY de la región descrita en (a.1).
- b) Calcule el volumen del sólido generado por la revolución en torno al eje OX del área plana limitada por las curvas de ecuaciones

$$x + y = 5 \quad \text{y} \quad xy = 4$$

P4. Sea A la región delimitada por las rectas

$$y_1 = x, \quad y_2 = \alpha x, \quad y_3 = 1 - \alpha x$$

con $\alpha \geq 1$

- a) Calcule el área de A y el volumen del sólido R al rotar A en torno al eje OX .
- b) Calcule α para que el área sea máxima.

P5. a) ¿Cómo podría calcular volúmenes de sólidos de revolución si es en torno a un eje de la forma $y = \alpha$ o $x = \beta$? Tenga en cuenta que rotar en torno al eje OY es rotar en torno a la recta $x = 0$ y rotar en torno al eje OX es rotar en torno a la recta $y = 0$

- b) Calcule el volumen del cuerpo formado por la rotación en torno a la recta $y = -1$, de la región acotada por $y = 4 - x^2$ e $y = 3$.
- c) Calcule el volumen del cuerpo formado por la rotación en torno a la recta $x = -2$, de la región acotada por las curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$

- Considere la región o área plana

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

- [Rotación eje OX - Método del disco]

Dada la región R el volumen generado al hacer rotar R en torno al eje OX será:

$$V = \int_a^b A(x) = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Notar que esto viene a partir de sumar volúmenes de cilindros o discos de altura infinitesimalmente pequeña, cuya formula es

$$V_{cilindro} = \pi r^2 h$$

Donde cada disco tiene $r = f(x)$ y $h = dx$.

- [Rotación eje OY - Método de la cáscara] Dada la región R , le agregamos la restricción de que $0 \leq a < b$. El volumen generado al

hacer rotar R en torno al eje OY será:

$$V = \int_a^b A(x) = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

Notar que esto viene a partir de sumar cilindros huecos, los cuales se calculan de la siguiente forma.

Dada el área sin tapas del cilindro, que se denomina área superficial de formula

$$A_{superficial} = 2\pi r h$$

Si la multiplicamos por una profundidad infinitesimal dx , obtendremos el volumen de un cilindro hueco. Notamos que r es la distancia del eje de giro hasta el cilindro hueco.

Por lo que reconocemos como $r = x$ (si el eje de giro es el eje OY) y $h = f(x)$.

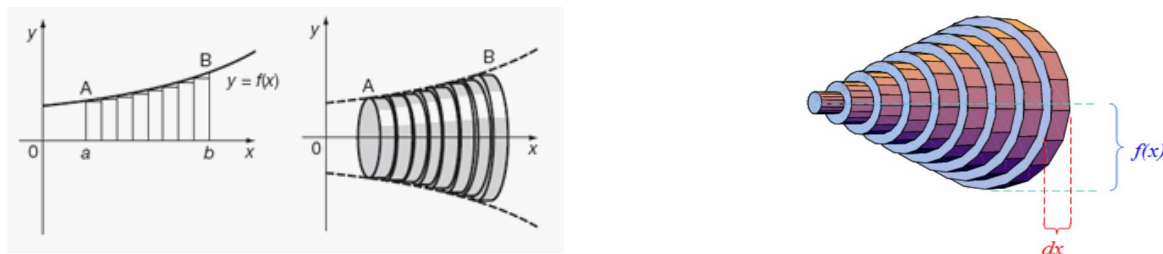


Figura 1: Construcción método del disco

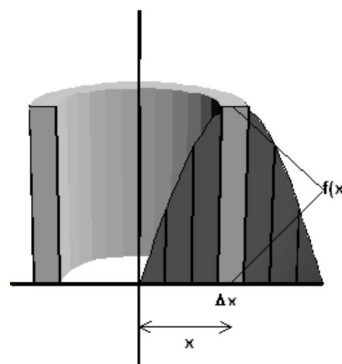


Figura 2: Construcción método de las cascaras