

MA1002-4 Cálculo Diferencial e Integral**Profesor:** Leonardo Sánchez C.**Auxiliar:** Marcelo Navarro**Auxiliar 7: TFC**

13 de noviembre de 2018

P1. Sea f definida y acotada en $[a, b]$, Riemann-Integrable tal que $\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0$. Pruebe que f^2 es también Riemann-Integrable en $[a, b]$.

P2. Demostrar que:

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}$$

No depende de x y Calcule su valor $\forall x > 0$

P3. Calcule el valor del límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin(t^2) dt}{1 - e^{x^6}}$$

P4. a) Demuestre que $\left| \int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x} \sin(x)}{1+x^2} dx \right| \leq \frac{\pi}{12e}$

b) Sean $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas, tales que $g(x) > 0, \forall x \in [0, \infty)$ y $f(0) = 0$. Demuestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f\left(\frac{x}{n}\right) g(x) dx = 0, \quad (n \in \mathbb{N} \setminus 0)$$

c) Suponga que f es integrable en $[a, b]$. Demuestre que existe un número $\xi \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^\xi f(x) dx = \int_\xi^b f(x) dx$$

P5. [propuesto] Se define $\forall n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x) dx$$

Demstrar que $I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}, \forall n \geq 2$

- Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable la función $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ es continua.

- **TFC 1:** Si f es una función continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y $a \in I$, entonces $\forall x \in \text{int}(I)$:

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow G'(x) = f(x)$$

- **Corolario del TFC 1:** Si la función F , continua en I es una primitiva cualquiera de f en I , entonces:

$$\forall a, b \in I, \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

- **TFC 2:** Sea f integrable en (a, b) si existe una función tal que: $F' = f$ en (a, b) , entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

- **Integración por Partes:** Sean f y g dos funciones continuas en $[a, b]$ y con derivadas continuas en (a, b) , entonces:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx$$

- **Integración por sustitución:** Sea g continua en $[a, b]$ y con derivada continua en (a, b) . Sea f continua en $g([a, b])$, entonces:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$

- **Valor Medio:** Sea f una función integrable en el intervalo $[a, b]$. Se llama valor medio de f en $[a, b]$ a

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

Se anota como $\bar{f}$ o $\langle f \rangle$.

- **TVM-integrales:** Si f es continua en $[a, b]$, entonces $\exists \xi(a, b)$ tal que $f(\xi) = \langle f \rangle$, es decir:

$$\int_a^b f = f(\xi)(b-a)$$

- **TVM Generalizado - integrales:** Si f es continua en $[a, b]$ y g es integrable en $[a, b]$, que no cambia de signo, entonces $\exists \xi(a, b)$ tal que

$$\int_a^b fg = f(\xi) \int_a^b g$$