MA1002-4 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar 5: Primitivas

6 de noviembre de 2018

- **[Primitiva]** Una función F continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y derivable en $int(I)$ (el interior de I), se llama primitiva de una función f sobre I si y sólo si

$$\forall x \in int(I), \quad F'(x) = f(x)$$

  Si F es una primitiva de f, entonces $F + c$ es otra primitiva de f para cualquier $c \in \mathbb{R}$

- Es muy importante notar lo siguiente
  - $\int f'(x)dx = f(x) + c$
  - $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = f(x)$
  - $\int f \pm g = \int f \pm \int g$
  - $\int(\lambda f) = \lambda(\int f)$

- **[Cambio de Variable]** si $u = g(x)$, entonces

$$\int f(u)du = \int (f \circ g)(x)g'(x)dx$$

- **[Integración por Partes]** Sean u y v dos funciones de x, entonces:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

  o, equivalentemente $\int uv' = uv - \int u'v$

  o, de manera compacta $\int udv = uv - \int vdu$

- **[Sustituciones trigonométricas]** Se recomiendan los siguientes cambios de variables
  - para $a^2 + x^2$, usar $x = atan(v)$ o $x = asenh(v)$
  - para $a^2 - x^2$, usar $x = asen(t)$ o $x = acos(t)$
  - para $x^2 - a^2$, usar $x = asec(v)$ o $x = acosh(v)$

  obs: notar que da lo mismo si se escoge v o t

- **[Fracciones parciales]**: si se tiene $\frac{P(x)}{Q(x)}$ con $gr(Q) > gr(P)$ se aconseja expresar $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en suma de fracciones.

- Sea $R(cos(x), sen(x))$ una fracción, donde tanto numerador y denominador solo contiene $sen(x)$ y $cos(x)$. Si se desea integrar se aconseja el cambio de variable $t = tan(x/2)$.

P1. Calcule primitivas:

a) $\int cos^5(x)dx$

b) $\int (x-1)\sqrt{x+4}dx$

c) $\int \frac{dx}{x - x^{\frac{3}{5}}}$

d) $\int \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}dx$

e) $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$

f) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

"But the science of operations, as derived from mathematics more especially, is a science of itself, and has its own abstract truth and value; just as logic has its own peculiar truth and value, independently of the subjects to which we may apply its reasonings and processes."
Ada Lovelace

P2. Resuelva usando integración por partes

a) $\int x^2 e^x dx$ *b)* $\int cos(ln(x))dx$

P3. Resuelva usando fracciones parciales

a) $\int \frac{dx}{1-x^2}$ *b)* $\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$

P4. Sea $I_{p,q} = \int x^p(1+x)^q$ demuestre que $(p+1)I_{p,q} = x^{p+1}(1+x)^q - qI_{p+1,q-1}$

P5. Sean f, g funciones, tal que f es derivable, $|f(x)| \neq 0$ y $f'(x) = -f(x)g(x)$. Demuestre que

$$\int g(x)dx = -ln(|f(x)|) + C$$

Deduzca con ello que si ínf $h(x)dx = h(x)$ con $h(x) > 0$, entonces $H(x) = ke^x$

Primivitas conocidas:

a) $\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \forall \alpha \neq -1$

b) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

c) $\int \sin(x) \, dx = -\cos(x) + C$

d) $\int \cos(x) \, dx = \sin(x) + C$

e) $\int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$

f) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$

g) $\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \sqrt{1-x^2} + C$

h) $\int \sinh(x) \, dx = \cosh(x) + C$

i) $\int \cosh(x) \, dx = \sinh(x) + C$

j) $\int \sec^2(x) \, dx = \tan(x) + C$

k) $\int \mathrm{cosec}^2(x) \, dx = \mathrm{cotg}(x) + C$

l) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + C$

"Studies show owning a ladder is more dangerous that a loaded gun. That's why I own ten guns, just in case some fool tries to sneak in here with a ladder."
Stan Pines