MA1002-4 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar 3: Aplicaciones de Derivadas

12 de octubre de 2018

P1. [**TVM**]

a) Usando el teorema de valor medio o TVM, demuestre que

$$1 + ln(x) < (x+1)ln(x+1) - xln(x) < 1 + ln(x+1),\ \forall x > 0$$

b) Demuestre que $cos(x)$ es uniformemente continua.

P2. [**Optimización**] Entre todos los triángulos rectángulos de perímetro $2p$, determine las dimensiones del que tiene área máxima.

P3. [**l'Hôpital**] Calcular

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - sen(x)}$$

P4. [**Todo**] Estudiar completamente la función definida por

$$f(x) = x + 1 - \frac{2}{x} - \frac{3ln(x)}{x}$$

Para esto:

a) Establezca el dominio y encuentre por inspección un cero de f

b) Estudie asíntotas de todo tipo.

c) Calcule f' y determine sus ceros por inspección. Estudie crecimientos, máximos y mínimos

d) Calcule f''. Estudie convexidades y encuentre puntos de inflexión y finalmente haga un bosquejo del gráfico de f.

P5. [**Sí alcanzmos...**]

a) Desarrolle mediante un polinomio de Taylor con resto, en torno a $x_0 = 0$, la función $senh(x)$

b) Calcule $senh(1)$ con términos no nulos del desarrollo anterior en orden 5 y estime una cota del error (puede usar $2,5 < e < 3$)

- Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diremos que $\overline{x}$ es mínimo local de la función f si existe $\varepsilon > 0$ tal que
$$f(\overline{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in (\overline{x} - \varepsilon, \overline{x} + \varepsilon)$$
Es decir, llamaremos a $\overline{x}$ como mínimo local si $f(\overline{x})$ es el menor valor en alguna vecindad. Notar que con esto, pueden existir muchos mínimos locales.

- **[Máximos y Mínimos]** Si $\overline{x} \in (a,b)$ es mínimo local o máximo local de una función derivable $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, entonces $f'(\overline{x}) = 0$

- **[TVM]** Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b), con $g(b) \neq g(a)$ y $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$. Entonces, existe $c \in (a,b)$ tal que
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$
En particular, si $g(x) = x$ se tiene que
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

- **[L'Hopital]** Sean $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivables tales que:
$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = L$$
Donde $L = 0$ o $L = \infty$. Luego:
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Se tiene lo siguiente
  - Si $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a,b)$, entonces f es creciente.
  - Si $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a,b)$, entonces f es decreciente.

- **[Convexidad]** Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se dice convexa si las rectas secantes al gráfico de la función quedan por encima del gráfico, vale decir. $\forall x, y \in [a,b], x < y$ se tiene que
$$f(z) \leq f(x) + \left[\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right](z - x), \quad \forall z \in (x,y)$$
o equivalentemente
$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

- Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces f es convexa en $[a,b]$ si y sólo si f' es creciente en (a,b). En el caso de que f' sea diferenciable, notamos que f sera convexa si $f'' \geq 0$.

- **[Concavidad]** f se dirá cóncava si $-f$ es convexa. Por lo tanto, en el caso de que f sea diferenciable se estudiará si f' es decreciente

- **[Desarrollo limitado]** Diremos que $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ posee un desarrollo limitado, que no es más que una aproximación polinomial, de orden k en torno al punto $\overline{x} \in (a,b)$ si existen constantes $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ tales que
$$f(x) = a_0 + a_1(x - \overline{x}) + \cdots + + a_k(x - \overline{x})^k + o((x - \overline{x})^k)$$
Donde $o(\cdot)$ es un error de aproximación y es tal que $\lim_{u \to 0} \frac{o(u^k)}{u^k} = 0$.
Usando el cambio de variables $h = x - \overline{x}$, el desarrollo limitado queda
$$f(\overline{x} + h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_k h^k + o(h^k)$$

- Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ k-veces derivable en $\overline{x} \in (a,b)$, y sea
$$T_f^k(h) := f(\overline{x}) + f'(\overline{x})h + \frac{f''(\overline{x})}{2} h^2 + \cdots + \frac{f[k](\overline{x})}{k!} h^k$$
Su desarrollo de Taylor de orden k en torno a $\overline{x}$. Entonces
$$f(x) = T_f^k(h) + o((x - \overline{x})^k)$$
con $\lim_{h \to 0} \frac{o(h^k)}{h^k} = 0$

- **[Punto critico]** Diremos que x_* es punto critico de una función diferenciable f si se cumple que $f'(x_*) = 0$.

- **[Clases C^k]** Diremos que $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ es de clase $C^k(a,b)$ si es $k-$veces derivable en todo (a,b) y la función $f^{[k]} : (a,b) \to \mathbb{R}$ es continua. Es decir, en la practica $f \in C^k(a,b)$ ssi
  f es k-veces derivable y la derivada k-esima es continua.

  Si lo anterior es cierto para todo $k \in \mathbb{N}$ diremos que f es de clase C^∞

- Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, k-veces derivable en $\overline{x} \in (a,b)$, con $f'(\overline{x}) = \cdots = f^{[k-1]}(\overline{x}) = 0$ y $f^{[k]} \neq 0$, $k \geq 2$. Entonces hay 3 casos posibles:

  1. Si k es par y $f^{[k]}(\overline{x}) > 0$, entonces $\overline{x}$ es un minimo local
  2. Si k es par y $f^{[k]}(\overline{x}) < 0$, entonces $\overline{x}$ es un maximo local
  3. Si k es impar, $\overline{x}$ es un punto de inflexión, es decir, es un punto en donde la función cambia su concavidad

- Sea $x_0 \in (a,b)$ y $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función de C^2. Si $f'(x_0) = 0$, existen 3 posibilidades:

  1. $f''(x_0) > 0$, entonces x_0 es mínimo local.
  2. $f''(x_0) < 0$, entonces x_0 es máximo local.
  3. $f'''(x_0) \neq 0$ se puede concluir que x_0 es un punto de inflexión.

- **[Asíntotas]** 3 tipos (estudiar independiente hacia $+\infty$ o $-\infty$)

  1. Horizontal: $y = c$, calcular $\lim_{x\to\infty} f(x) = c$.
  2. Vertical: $x = a$, encontrar a tal que $\lim_{x\to a} f(x) \to \pm\infty$.
  3. Oblicuas: $y = mx + n$, donde $m = \lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx$

- **[Error $o(\cdot)$ en Desarrollo de Taylor]**
  Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $(k+1)$-veces derivable en todo punto del intervalo (a,b). Sea $T_f^k(\cdot)$ el polinomio de taylor de orden k en $\overline{x} \in (a,b)$. Entonces, para todo $x > \overline{x}$ (respectivamente $x < \overline{x}$) existe $\xi \in (\overline{x}, x)$ (respectivamente $\xi \in (x, \overline{x})$ tal que:

  $$f(x) = T_f^k(x - \overline{x}) + \frac{f^{[k+1]}(\xi)}{(k+1)!}(x - \overline{x})^{k+1}$$

  Es decir, se encontró una expresión para el error $o(\cdot)$