MA1002-4 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar 1: Continuidad

28 de septiembre de 2018

P1. Sea (x_n) una sucesión tal que las subsucesiones $(x_{2n}),(x_{2n+1})$ y (x_{3n}) son convergentes. Demuestre que la sucesión (x_n) es convergente.

P2. Una función se denomina función de Lipschitz, si cumple con:

$$\exists L>0,\ \forall x,y \in Dom(f),\ |f(x)-f(y)| \leq L|x-y|$$

Demuestre que si f es Lipschitz, entonces es continua

P3. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua y sea (a_n) una sucesión en $[a,b]$ (no necesariamente convergente) tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=\ell$. Demuestre que existe un $x_0\in[a,b]$ tal que $f(x_0)=\ell$

P4. Demuestre usando la caracterización $\varepsilon-\delta$ que

a) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ es continua en $x_0=\frac{1}{2}$

b) $g(x)=3x^2+1$ es continua en $x_0=1$

P5. Considere la familia de polinomios $g_n(x)=x^n+x-1$.

a) Probar que $\forall n\geq 1,\ g_n(x)$ tiene una raíz r_n positiva

b) Demuestre que la sucesión de raices $(r_n)_{n\geq 1}$ tiene una subsucesión convergente.

P6. Demuestre que no existe función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua tal que $(f\circ f)(x)=e^{-x}$.

P7. [**Propuesto**] sea f la función definida por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-1}{ln(1+x)} & si \quad x>0 \\ (x-\alpha)^2 & si \quad x<0 \\ \beta & si \quad x=0 \end{cases}$$

Encuentre todos los valores de α y β para los cuales f es continua en todo $\mathbb{R}$.

"Creativity comes from applying things you learn in other fields to the field you work in"
Aaron Swartz

Recuerdo:

- Una **sucesión** es una función
$$\begin{aligned} s\colon \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto s(n) = s_n \end{aligned}$$
- $s_n \to \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |s_n - \ell| \leq \varepsilon$
- (s_n) se dirá acotada si $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |s_n| \leq M$
- Sea (s_n) una sucesión y sea $\varphi : N \to N$ una función *estrictamente creciente*. Se llama **subsucesión** de s_n generada por φ, a la sucesión $s_{\varphi(n)}$
- Sea (s_n) una sucesión y sea $\ell \in \mathbb{R}$. Entonces
$$s_n \to \ell \iff \textit{Todas las subsucesiones de } (s_n) \textit{ convergen a } \ell$$
- **Teorema de Bolzano - Weiestrass**
Toda sucesión acotada tiene al menos una subsucesión convergete
- **Función continua en un punto**
Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\overline{x} \in A$. Diremos que f es una **función continua** en $\overline{x}$ si
$$\forall (x_n) \subseteq A, x_n \to \overline{x} \implies f(x_n) \to f(\overline{x})$$
- **Caracerización** $\varepsilon - \delta$
Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\overline{x} \in A$. f es continua en $\overline{x}$ si y solo si se cumple que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A$
$$\{|x - \overline{x}| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(\overline{x})| \leq \varepsilon\}$$
- **Álgebra de funciones continuas**
Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas en $\overline{x} \in A \cap B$. Luego $f \pm g, \lambda f$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ con $g(\overline{x}) \neq 0$. Además la composición de continuas es continua
- Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f es continua $\forall \overline{x} \in A$, diremos que f es continua.
- **[TVI o Bolzano]** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)f(b) \leq 0$. Entonces existe $\overline{x} \in [a, b]$ tal que $f(\overline{x}) = 0$.
- **[TVI-Generalizado]** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Si $c, d \in f([a, b])$. Entonces $\forall x_0 \in [c, d], \exists \overline{x} \in [a, b]$ tal que $f(\overline{x}) = x_0$
- **[Teorema de Weierstras]**
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es acotada y alcanza su mínimo y su máximo en $[a, b]$.
- Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y estrictamente monótona (creciente o decreciente) con I un intervalo. Entonces $J = f(I)$ es un intervalo y la inversa $f^{-1} : J \to I$ es continua.