Diseño de Mecanismos y Licitaciones Profesor: Juan Escobar

Primavera 2018

Tarea 1

Entrega: viernes 26 de octubre a las 11hrs con Olga Barrera

1. El alcalde de un pueblo está decidiendo si construir o no una plaza. El valor de la construcción es $c > 1$. El pueblo tiene n habitantes y el habitante i valora la plaza en $t_i \in [0,1]$. El alcalde no sabe si es socialmente eficiente construir la plaza, por lo que ha diseñado un mecanismo de pivote para tomar su decisión y decidir cómo se financia la plaza. Encuentre el mecanismo de pivote que implementa la construcción de la plaza ssi $\sum_{i=1}^{n} t_i > c$.

2. Considere una negociación entre un vendedor y un comprador. El comprador valora el bien en t que se distribuye $[0,1]$ de acuerdo a F, con F que satisface todos los supuestos del RET. Para el vendedor el bien no tienen ningun valor. El valor de t es información privada para el comprador.

   a. Encuentre el mecanismo de venta óptimo para el vendedor. Encuentre el ingreso esperado del vendedor.

   b. Suponga que el vendedor está considerando vender el objeto a través de una licitación sobre cerrado primer precio. El número de participantes en la licitación es igual a $N \geq 2$. Las valoraciones privadas son independientes e idénticamente distribuidas de acuerdo a F. Suponemos que $F(t) = t^2$. Calcule el ingreso esperado del vendedor y compárelo con su respuesta en a.

3. Ustede debe diseñar un concurso. Dos participantes en un concurso deciden sus esfuerzo $e_i \geq 0$ simultáneamente. El valor que i le otorga a ganar la contienda es su información privada t_i y suponemos se distribuye uniformemente en $[0,1]$. Suponemos que el costo del esfuerzo es e_i. Usted decide una función $P(e_1, e_2)$ que determina la probabilidad de que 1 gane como función de los esfuerzos e_1, e_2 (la probabilida de que 2 gane es simplemente $\bar{P}(e_1, e_2) \equiv P(e_2, e_1)$. Una vez que usted define P, los participantes juegan un juego Bayesiano. De este modo, la utilidad de 1 es

$$u_1(e_1, e_2, t_1) = t_1 P(e_1, e_2) - e_1$$

   Dado un equilibrio Bayesiano simétrico, $e(t)$, la probabilidad de que el bien se le asigne al participante 1 esta dada por la función de asignacion $p(t_1, t_2) = P(e(t_1), e(t_2)) \in [0,1]$. Para todo x, definimos $\Phi(x) = \int p(x, t_2) dt_2$.

   a. Muestre que en cualquier equilibrio Bayesiano simétrico en estrategias crecientes, el participante i utilizará una estrategia

$$s(t) = t\Phi(t) - \int_0^t \Phi(s) ds.$$

   Muestre además que el esfuerzo total esperado en el concurso es igual

$$S(p) = \int \Big(p(t_1, t_2)(2t_1 - 1) + p(t_2, t_1)(2t_2 - 1) \Big) dt_1 dt_2$$

   HINT: Use la lógica del Teorema de la Equivalencia de Ingresos.

   b. Suponga que su objetivo es diseñar un concurso (es decir, una regla para escoger al ganador $P(e_1, e_2)$) de modo de minimizar el esfuerzo total de los participantes, sujeto a que en cualquier escenario se lleve el premio el que más valora el bien con probabilidad al menos $1 - x$. Plantee el problema como

$$\min_p \{ S(p) \mid p(t_1, t_2) \geq 1 - x, \forall t_1 > t_2 \}$$

   con p que satisface las condiciones descritas. Resuelva el problema cuando $x = 0$ y cuando $x = 1$. Es decir, encuentre el concurso óptimo P. Explique intuitivamente sus soluciones y compárelas. En particular, muestre que mientras más eficiente se quiera diseñar el concurso (en el sentido que el premio se lo lleva quien mas lo valora), mayor será el esfuerzo total esperado.

4. **La licitación compre-ya.** Algunas licitaciones de internet funcionan de la siguiente manera. El vendedor fija un precio compre-ya al cual cualquier comprador puede finalizar la licitación comprando ese precio. Por ejemplo, si el precio compre-ya es 50, el procedimiento comienza con una licitación inglesa a precio 0 y va ascendiendo gradualmente hasta que solo queda un solo participante (que obtiene el bien y paga el precio al que el último participante abandono) o algún participante ofrece 50 (y obtiene el bien pagando 50). Para modelar esto, suponemos que hay dos participantes en la licitación, cada uno con una valoración uniforme en [0,100]. El precio compre-ya es 50.

   a. Caracterice la estrategia de equilibrio para un participante con una valoración menor o igual a 50.

   b. Considere un participante con una valoración $v > 50$ se mantiene en la licitación mientras el precio sea menor que $p = p(v) < 50$ y en p hace saltar el precio a 50. Muestre que p satisface la siguiente ecuación:
   $$\frac{v}{2} = \frac{p}{v}\frac{p}{2} + \frac{v-p}{v}50.$$
   HINT: Use el teorema de la equivalencia de ingresos para deducir que, condicional a ganar, el tipo v paga en esperanza $v/2$.

5. **Bidding credits.** Hay licitaciones donde ciertos grupos (por ejemplo, empresas pequeñas) se ven favorecidos por las reglas de la licitación. En este problema se provee una explicación para el uso de créditos de oferta.[1]

   Considere un model con dos participantes con valoraciones privadas distribuidas independiente y uniformemente en $[0, 1]$ y $[0, \alpha]$, con $\alpha < 1$.

   a. Considere una licitación segundo precio. Muestre que el pago esperado para el vendedor es la esperanza de la segunda valoración más alta y es igual a
   $$\alpha(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\alpha - \frac{1}{3}\alpha^2).$$

   b. Suponga ahora que el vendedor diseña una licitación primer precio en que el participante 2 tiene un crédito por ofertas (bidding credit). De este modo, el participante 2 paga una fracción α de su oferta ganadora. Muestre que el pago esperado del vendedor es $\frac{1}{6}(1 + \alpha)$.

   c. Muestre que el vendedor puede beneficiarse de un bidding credit. Explique intuitivamente el resultado. En particular, conecte su respueste con el problema del monopolio.

[1] Otro mecanismo para favorecer grupos son los set-asides, o licencias exclusivas licitadas solo a miembros del grupo.