Control 3: IN790 Modelos Estocásticos en Sistemas de Ingeniería 2018-02
Profesor: José Correa
Auxiliares: Ian Bortnic, Raimundo Saona

P1. Un camión viaja sucesivamente entre las ciudades A y B, que las conecta un camino de 100km. Al viajar de A a B la carga es aleatoria por lo que el camión viaja a una velocidad distribuida uniformemente en el intervalo $[50, 100]$ (en [km/hr]). Por otra parte, al viajar de B a A, con probabilidad $1/2$, el camión va muy cargado por lo que viaja a 50 km/hr y, con probabilidad $1/2$, el camión va descargado por lo que viaja a 100 km/hr. Considere T_{AB} y T_{BA} las variables aleatorias de los tiempos de traslado desde A hasta B y desde B hasta A respectivamente.

a) Usando teoría de renovación con beneficios, demuestre que la proporción del tiempo en que el camión esta viajando de A a B (en el largo plazo) es

$$\frac{\mathbb{E}(T_{AB})}{\mathbb{E}(T_{AB}) + \mathbb{E}(T_{BA})}.$$

b) Calcule el valor de la expresión anterior.

c) Calcule la fracción del tiempo en que el camión viaja a 50km/hr, en el largo plazo.

P2. Considere una localidad por la que pasa un río. Se quiere estimar el largo de los periodos de sequía. En esta localidad, con probabilidad un tercio, cada noche llueve 1 milimetro. Por otro lado, cada día se seca medio milimetro (si es que hay agua). Un equipo de ingenieros propone el siguiente modelo discreto para representar la cantidad de agua en la localidad.

$$X_{n+1} = \left(X_n - \frac{1}{2}\right)_+ + \delta_n ,$$

donde $(\delta_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión i.i.d. con distribución Bernoulli(1/3).

Al momento que se inicia el modelamiento hay sequía. Definimos un ciclo como el periodo que incluye desde el inicio de una sequía hasta el inicio de la siguente sequía. Definimos $(S_n)_{n\geq 1}$ y $(A_n)_{n\geq 1}$ como los tiempos de sequía y de presencia de agua respectivamente, es decir, S_1 es la duración de la primera sequía y A_1 es el tiempo que falta para que empiece la segunda sequía (así, el primer ciclo dura $S_1 + A_1$).

a) Pruebe que $(S_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión i.i.d., identifique su distribución y calcule su esperanza.

b) Justifique y explique el modelo propuesto por los ingenieros. Además, justifique que la esperanza de la duración de cada ciclo es finita.
Hint: Puede usar tanto martingalas como cadenas de Markov para justificar finitud.

c) Pruebe que la fracción del tiempo en que hay sequía es un tercio (en promedio, en el largo plazo).
Hint: Use teoría de reonvación con beneficio $R_n = 2$ si llueve la noche n y cero si no.

d) Pruebe que $(A_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión i.i.d. y calcule su esperanza.
Hint: Use teoría de renovación con beneficio, sobre los ciclos, con $R_n = A_n$ y relacione el resultado con la parte anterior.

e) Asumiendo que $Var(A_n) = \sigma^2$ para todo n, calcule la esperanza, en promedio y en el largo plazo, del tiempo que falta para el inicio de la siguiente sequía.
Hint: Pruebe que $(S_n)_{n\geq 1}$ y $(A_n)_{n\geq 1}$ son independientes y utilice la vida residual de un ciclo.

P3. Considere el siguiente problema de optimal stopping. Tenemos n variables aleatorias, donde $n-1$ de ellas $(X_1, \ldots, X_{n-1})$ son deterministas e iguales a 1 y una de ellas (X_n) entrega el valor n con probabilidad $1/n$ y el valor 0 si no. Tomamos además una permutación aleatoria σ, uniforme en $[n] = \{1, \ldots, n\}$, de forma que un mortal observa la secuencia $X_{\sigma_1}, \ldots, X_{\sigma_n}$.

a) Pruebe que

$$\mathbb{E}(\max_{i\in[n]}\{X_i\}) = 2 - \frac{1}{n}.$$

b) Considere una regla de parada dada por un threshold fijo T para el mortal. Esto es, el mortal decide parar la primera vez que observa un valor al menos T (y se queda con ese valor). Pruebe que para todo T,

$$\frac{\mathbb{E}(Mortal)}{\mathbb{E}(\max)} \leq \frac{1}{2} + \frac{3n-2}{2n\,(2n-1)}.$$

c) Considere ahora la regla de parada siguiente para el mortal: Fijamos $T = 1$ y si vemos el valor 1 paramos con probabilidad $1/n$. Pruebe que ahora se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}(Mortal)}{\mathbb{E}(\max)} \geq 1 - \frac{1}{e}.$$

Para esto, se sugiere (pero puede demostrarlo de otra forma) que siga los siguientes pasos.

I) Para $i \in [n]$, calcule la ganancia del mortal dado que la variable X_n aparece en el lugar i, ie: $\mathbb{E}(Mortal|\sigma_i = n)$.

II) Utilice probabilidades totales y el cálculo anterior para deducir el resultado.
Hint: $\sigma^{-1}(n)$, la posición en que se muestra la variable X_n, es uniforme en $[n] = \{1, \ldots, n\}$.

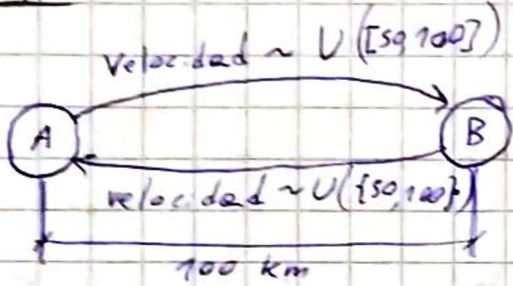
d) ¿Cómo explica la aparente contradicción?

1/2

RAIMUNDO SAONA URMENETA
18.925.104-1

CONTROL 3

P1 CAMIÓN VIAJERO



Muestre que la proporción del tiempo que viaja de A a B es

$$\frac{\mathbb{E}(T_{AB})}{\mathbb{E}(T_{AB}+T_{BA})}$$

Definimos

$$X_i = T^i_{A,B} + T^i_{B,A}$$
$$R_i = T^i_{A,B}$$

donde $T^i_{A,B}$ es el tiempo que demoró el i-ésimo viaje de A a B.
Como R_t es el tiempo acumulado que se ha viajado de A a B, tenemos que:

$$\frac{\text{tiempo viajando de A a B}}{\text{tiempo total}} = \frac{R_t}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{\mathbb{E}(R)}{\mathbb{E}(X)} = \frac{\mathbb{E}(T_{A,B})}{\mathbb{E}(T_{AB}+T_{BA})}$$

Calcule el valor de la expresión anterior

Dado que tiempo = distancia/velocidad, tenemos que

$$\mathbb{E}(T_{A,B}) = 100\int_{50}^{100} \frac{1}{x}\,\frac{dx}{50} = 2\left(\ln(x)\Big|_{50}^{100}\right) = 2\ln(2)$$

y también

$$\mathbb{E}(T_{B,A}) = 100\left(\frac{1}{50}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{100}\cdot\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} = 3/2$$

Por lo que

$$\frac{\mathbb{E}(T_{A,B})}{\mathbb{E}(T_{A,B}+T_{B,A})} = \frac{2\ln(2)}{2\ln(2)+3/2}$$

Calcule la fracción del tiempo que el camión viaja a 50 km/hr.

Notar que con probabilidad 1, el camión viaja a 50 km/hr sólo de B a A. Definimos

$$X_i := T^i_{A,B} + T^i_{B,A}$$

$$R_i := T_{B,A} \mathbb{1}_{T_{B,A}=2}.$$

Igual que antes R_t es el tiempo viajado a 50 km/hr y así,

$$\frac{\text{Tiempo viajando a 50 km/hr}}{\text{Tiempo total}} = \frac{R_t}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{\mathbb{E}(R)}{\mathbb{E}(X)} = \frac{2 \cdot 1/2}{2\ln(2) + 3/2}.$$

$\frac{1}{4}$

CONTROL 3

RAIMUNDO SAONA URMENETA
18.925.104-1

P2 SEQUÍAS DEL RÍO

Considere
$$X_{n+1} = (X_n - 1/2)_+ + \delta_n$$
donde $(\delta_n)_{n\geq 1}$ son iid y $\delta \sim Ber(1/3)$ y $X_0 = 0$.

Definimos $(S_n)_{n\geq 1}$ y $(A_n)_{n\geq 1}$ como los tiempos de sequía y de presencia de agua respectivamente.

Justifique y explique el modelo.

Se entiende que
$$X_n = \text{mm de agua en la localidad a tiempo } n.$$
Como se inicia en sequía $X_0 = 0$.

Al día $n+1$, hay que considerar el agua que cayó de la noche del día n, esto está representado por δ_n.

El otro cambio es que el agua del día anterior sigue ahí pero $1/2$ mm se ha secado. Así,
$$X_{n+1} = (\text{acumulado}) - (\text{secado}) + (\text{posible lluvia})$$
La parte positiva en $(X_n - 1/2)_+$ asegura que el agua acumulada y secada hasta el día $(n+1)$ no sea negativa (no hay agua negativa).

Justifique que $\mathbb{E}(\text{Ciclo}) < \infty$

Primero hay que notar que $(S_n)_{n\geq 1}$ son iid y $S \sim Geo(1/3)$ por lo que $\mathbb{E}(\text{Ciclo}) = 3 + \mathbb{E}(A_n)$. Llamemos
$$T = \inf\{n : \delta_n = 1\}$$
$$= \text{primera noche que llueve}$$
Consideramos
$$Y_0 = 0 \qquad Y_{n+1} = (\cancel{X_n}) \; Y_n - 1/2 + \delta_n'$$
con $\delta_1 = 1$, $\delta_n' \sim Ber(1/3)$.

Notamos que $A_1' \overset{\mathcal{L}}{=} A_1$ donde A_1' corresponde al periodo similar, pero para el proces $(Y_n)_{n\geq 1}$.

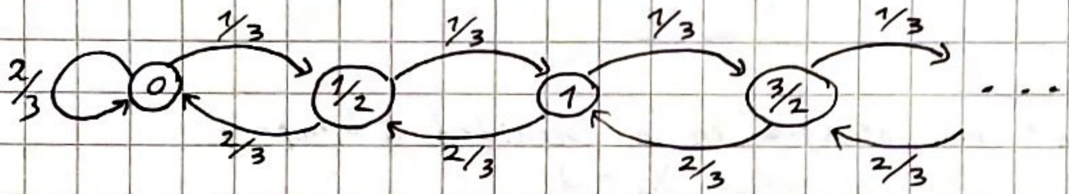
2/4 Ya que $(Y_n)_{n\geq 1}$ es una sub-martingala estricta y A'_1 corresponde al hitting time en 0,

$$\mathbb{E}(A'_1) < \infty$$

de donde, $\mathbb{E}(A_1) < \infty$ y así,

$$\mathbb{E}(\text{Ciclo}) < \infty$$

Alternativamente, podemos definir la siguiente cadena de Markov



Claramente es una cadena recurrente positiva. Más aún,

$$A_1 \stackrel{F}{=} T_{1/2,0} + 1$$
$$= \text{"tiempo de llegar desde } 1/2 \text{ a } 0\text{"} + 1$$

Por Markov, sabemos que $\mathbb{E}(T_{1/2,0}) < \infty$, de donde se obtiene el resultado.

Pruebe que $(S_n)_{n\geq 1}$ es iid y $S \sim Geo(1/3)$

Como S_n se empieza a contar desde

$$T := \sum_{i=1}^{n-1} S_i + A_i$$

tenemos que

$$X_T \equiv 0$$

en otras palabras "una sequía empieza sin agua"

Ya que

$$(\delta_n)_{n\geq 1} \quad \text{son iid.}$$

S_n es independiente del pasado y luego tienen la misma distribución. Notar que

$$S_1 := \inf\{n : \delta_n = 1\} \sim Geo(1/3)$$

Finalmente

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(Geo(1/3)) = 3$$

3/4

RAIMUNDO SAONA URMENETA
18.925.104-1

Pruebe que la fracción del tiempo en que hay sequía es
En efecto, definimos

$$X_n \equiv 1$$
$$R_n = 2\,\mathbb{1}_{S_n=1}$$

Luego,

$$R_t = \sum_{i=1}^{\lfloor t\rfloor} R_i = \text{"Número de días con agua que se han asegurado con la lluvia hasta tiempo } t\text{"}$$

cumple que

$$\frac{R_t}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{\mathbb{E}(R)}{\mathbb{E}(X)} = \frac{2}{3} = \text{"Fracción del tiempo con agua"}$$

Por lo tanto,

$$\text{"Fracción del tiempo en sequía"} = 1/3.$$

Pruebe que $(A_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión iid y calcule $\mathbb{E}(A)$
Definimos

$$X_n = S_n + A_n$$
$$R_n = A_n$$

Luego

$$R_t = \text{"Número de días con agua que se han asegurado hasta el ciclo actual."}$$

Notar que $R_t \geq$ (R_t de la parte anterior) porque contamos las lluvias del ciclo completo y no solo las vistas. Ahora bien, como $\mathbb{E}(\text{ciclo}) < \infty$, estas cantidades cumplen que

$$\mathbb{E}(R_t^{(c)}) \leq \mathbb{E}(R_t) \leq \mathbb{E}(R_t^{(c)}) - \mathbb{E}(\text{ciclo})$$

donde $R_t^{(c)}$ es (R_t de la parte anterior). En particular,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}(R_t^{(c)})}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{R_t^{(c)}}{t} = \frac{2}{3} = \lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}(R_t)}{t}$$

4/4 Y así,

$$\frac{\mathbb{E}(R)}{\mathbb{E}(X)} = \frac{\mathbb{E}(A)}{\mathbb{E}(A+S)} = \frac{2}{3} = \lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}(R_t)}{t}$$

de donde,

$$\mathbb{E}(A) = 2\,\mathbb{E}(S) = 6$$

La sucesión $(A_n)_{n\geq 1}$ es iid por la misma razón que $(S_n)_{n\geq 1}$ es iid. ← Nota: Si la justificaron una vez, es suficiente.

Asuma que $Var(A_n) = \sigma^2$ y calcule el tiempo que falta para siguiente sequía.

Tomando

$$X_n = S_n + A_n$$

el tiempo hasta la próxima sequía es simplemente la vida residual, llamemosla Y_t := "tiempo que falta hasta la próxima sequía a tiempo t"

Como se vió en clases, se tiene que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t Y_s\, ds = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}(Y_s)\,ds = \frac{\mathbb{E}(X^2)}{2\,\mathbb{E}(X)}$$

En este caso,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \mathbb{E}(S^2) + \mathbb{E}(A^2) + 2\,\mathbb{E}(SA) \\
&= \left[VAR(Geo(1/3)) + \mathbb{E}(Geo(1/3))^2\right] + \left[VAR(A) + \mathbb{E}(A)^2\right] + 2\,\mathbb{E}(SA) \\
&= \left[\frac{1-1/3}{(1/3)^2} + (3)^2\right] + \left[\sigma^2 + (6)^2\right] + 2\,\mathbb{E}(S)\,\mathbb{E}(A) \\
&= [9-3+9] + [\sigma^2 + 36] + 2\cdot 3\cdot 6 \\
&= 15 + \sigma^2 + 36 + 30 \\
&= 81 + \sigma^2
\end{aligned}$$

Notar que usamos que $S \perp\!\!\!\perp A$, de nuevo porque $(S_n)_{n\geq 1}$ son iid.

1/4

Control 3

Raimundo Saona Urmeneta
18.925.104-1

P3 | Prophet Inequality Aleatorio

Considere la instancia (en orden aleatorio)

$$V_1 = \dots = V_{n-1} \equiv 1 \quad , \quad V_n = \begin{cases} n & \text{c.p. } 1/n \\ 0 & \text{c.p. } 1 - 1/n \end{cases}$$

Pruebe que

$$\mathbb{E}\left(\max_{i \in [n]} \{V_i\}\right) = 2 - \frac{1}{n}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\max) &= \mathbb{E}(V_n \mathbb{1}_{V_n = n}) + \mathbb{E}(1 \, \mathbb{1}_{V_n = 0}) \\ &= n\left(\frac{1}{n}\right) + 1\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= 2 - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Considerando reglas threshold, muestre que

$$\frac{\mathbb{E}(\text{mortal})}{\mathbb{E}(\max)} \leq \frac{1}{2} + \frac{3n-2}{2n(2n-1)}$$

En efecto, si $T > 1$, el mortal toma n sólo si lo ve y $\mathbb{E}(\text{mortal}) = n(1/n) = 1$.

Si $T \leq 1$, el mortal toma un uno amenos que
1) V_n aparezca primero y
2) $V_n = n$.

Así,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\text{mortal}) &= \frac{1}{n} \mathbb{E}(\text{mortal} \mid V_{\sigma_1} = V_n) + \left(1 - \frac{1}{n}\right) 1 \\ &= \frac{1}{n}\left[n\left(\frac{1}{n}\right) + 1\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right] + 1 - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n}\left[2 - \frac{1}{n}\right] + 1 - \frac{1}{n} \\ &= 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Por lo que es mejor tomar $T \leq 1$.

2/4 Así,

$$\frac{\mathbb{E}(\text{Mortal})}{\mathbb{E}(\text{máx})} \leq \frac{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1-\frac{1}{2n}+\frac{3}{2n}-\frac{1}{n^2}}{2\left(1-\frac{1}{2n}\right)}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{2n}-\frac{1}{n^2}}{2\left(1-\frac{1}{2n}\right)}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{(3n-2)}{2n(2n-1)} = \frac{1}{2} + \frac{3n-2}{2n(2n-1)}$$

Considere aceptar 1 con probabilidad $1/n$. Pruebe que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}(\text{Mortal})}{\mathbb{E}(\text{máx})} \geq 1 - \frac{1}{e}$$

Sea $i \in [n]$, notemos que

$$\mathbb{E}(\text{Mortal} \mid \sigma_i = n) = 1\cdot\left(1/n\right) + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left[1\cdot\left(1/n\right)\right] + \left(1-\frac{1}{n}\right)^2\left[1\cdot\left(1/n\right)\right] + \dots$$

$$+ \left(1-\frac{1}{n}\right)^{i-1}\left[n\ 1/n\right] + \left(1-\frac{1}{n}\right)^{i}\left[1\cdot\left(\frac{1}{n}\right)\right] + \dots$$

$$+ \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}\left[1\cdot\left(1/n\right)\right]$$

$$= \left\{\sum_{j=0}^{n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^j 1/n\right\} - \left(1-\frac{1}{n}\right)^{i-1} 1/n + \left(1-\frac{1}{n}\right)^{i-1}$$

$$= \frac{1}{n}\,\frac{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{1/n} - \left(1-\frac{1}{n}\right)^{i-1}\frac{1}{n} + \left(1-\frac{1}{n}\right)^{i-1}$$

$$= 1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)^n - \left(1-\frac{1}{n}\right)^{i-1}\frac{1}{n} + \left(1-\frac{1}{n}\right)^{i-1}$$

Así,

$$\mathbb{E}(\text{Mortal}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(\text{Mortal} \mid \sigma_i = n)$$

$$= 1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)^n + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{i-1} - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{i-1}$$

$$= 1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n + 1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n - \frac{1}{n}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right]$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 2\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

3/4

RAIMUNDO SAONA URMENETA
18.925.104-1

De esta forma,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}(\text{mortal})}{\mathbb{E}(\max)} = \frac{2\left(1-\frac{1}{e}\right)}{2} = 1-\frac{1}{e}$$

¿Cómo explica la aparente contradicción?

Entiendesé que el threshold $T=1$, con aceptación aleatoria de unos al inicio uno pensaría que no debería ser mejor que cualquier threshold fijo, pero (de los cálculos) vemos que esta intuición no es correcta.

No hay contradicción pues las reglas de threshold con aceptación aleatorea es un conjunto más grande que las reglas de threshold fijo por lo que el mortal tiene la opción de hacerlo mejor (y lo hace mejor).