Control 3: IN790 Modelos Estocásticos en Sistemas de Ingeniería 2018-02
Profesor: José Correa
Auxiliares: Ian Bortnic, Raimundo Saona

P1. Un camión viaja sucesivamente entre las ciudades A y B, que las conecta un camino de 100km. Al viajar de A a B la carga es aleatoria por lo que el camión viaja a una velocidad distribuida uniformemente en el intervalo $[50, 100]$ (en [km/hr]). Por otra parte, al viajar de B a A, con probabilidad 1/2, el camión va muy cargado por lo que viaja a 50 km/hr y, con probabilidad 1/2, el camión va descargado por lo que viaja a 100 km/hr. Considere T_{AB} y T_{BA} las variables aleatorias de los tiempos de traslado desde A hasta B y desde B hasta A respectivamente.

a) Usando teoría de renovación con beneficios, demuestre que la proporción del tiempo en que el camión esta viajando de A a B (en el largo plazo) es

$$\frac{\mathbb{E}(T_{AB})}{\mathbb{E}(T_{AB}) + \mathbb{E}(T_{BA})} \,.$$

b) Calcule el valor de la expresión anterior.

c) Calcule la fracción del tiempo en que el camión viaja a 50km/hr, en el largo plazo.

P2. Considere una localidad por la que pasa un río. Se quiere estimar el largo de los periodos de sequía. En esta localidad, con probabilidad un tercio, cada noche llueve 1 milimetro. Por otro lado, cada día se seca medio milimetro (si es que hay agua). Un equipo de ingenieros propone el siguiente modelo discreto para representar la cantidad de agua en la localidad.

$$X_{n+1} = \left(X_n - \frac{1}{2}\right)_+ + \delta_n \,,$$

donde $(\delta_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión i.i.d. con distribución Bernoulli(1/3).

Al momento que se inicia el modelamiento hay sequía. Definimos un ciclo como el periodo que incluye desde el inicio de una sequía hasta el inicio de la siguente sequía. Definimos $(S_n)_{n\geq 1}$ y $(A_n)_{n\geq 1}$ como los tiempos de sequía y de presencia de agua respectivamente, es decir, S_1 es la duración de la primera sequía y A_1 es el tiempo que falta para que empiece la segunda sequía (así, el primer ciclo dura $S_1 + A_1$).

a) Pruebe que $(S_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión i.i.d., identifique su distribución y calcule su esperanza.

b) Justifique y explique el modelo propuesto por los ingenieros. Además, justifique que la esperanza de la duración de cada ciclo es finita.
Hint: Puede usar tanto martingalas como cadenas de Markov para justificar finitud.

c) Pruebe que la fracción del tiempo en que hay sequía es un tercio (en promedio, en el largo plazo).
Hint: Use teoría de reonvación con beneficio $R_n = 3$ si llueve la noche n y cero si no.

d) Pruebe que $(A_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión i.i.d. y calcule su esperanza.
Hint: Use teoría de renovación con beneficio, sobre los ciclos, con $R_n = A_n$ y relacione el resultado con la parte anterior.

e) Asumiendo que $Var(A_n) = \sigma^2$ para todo n, calcule la esperanza, en promedio y en el largo plazo, del tiempo que falta para el inicio de la siguiente sequía.
Hint: Pruebe que $(S_n)_{n\geq 1}$ y $(A_n)_{n\geq 1}$ son independientes y utilice la vida residual de un ciclo.

P3. Considere el siguiente problema de optimal stopping. Tenemos n variables aleatorias, donde $n-1$ de ellas $(X_1, \dots, X_{n-1})$ son deterministas e iguales a 1 y una de ellas (X_n) entrega el valor n con probabilidad $1/n$ y el valor 0 si no. Tomamos además una permutación aleatoria σ, uniforme en $[n] = \{1, \dots, n\}$, de forma que un mortal observa la secuencia $X_{\sigma_1}, \dots, X_{\sigma_n}$.

a) Pruebe que

$$\mathbb{E}(\max_{i\in[n]}\{X_i\}) = 2 - \frac{1}{n}\,.$$

b) Considere una regla de parada dada por un threshold fijo T para el mortal. Esto es, el mortal decide parar la primera vez que observa un valor al menos T (y se queda con ese valor). Pruebe que para todo T,

$$\frac{\mathbb{E}(Mortal)}{\mathbb{E}(\text{máx})} \leq \frac{1}{2} + \frac{3n-2}{2n\,(2n-1)}\,.$$

c) Considere ahora la regla de parada siguiente para el mortal: Fijamos $T = 1$ y si vemos el valor 1 paramos con probabilidad $1/n$. Pruebe que ahora se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}(Mortal)}{\mathbb{E}(\text{máx})} \geq 1 - \frac{1}{e}\,.$$

Para esto, se sugiere (pero puede demostrarlo de otra forma) que siga los siguientes pasos.

i) Para $i \in [n]$, calcule la ganancia del mortal dado que la variable X_n aparece en el lugar i, ie: $\mathbb{E}(Mortal|\sigma_i = n)$.

ii) Utilice probabilidades totales y el cálculo anterior para deducir el resultado.
Hint: $\sigma^{-1}(n)$, la posición en que se muestra la variable X_n, es uniforme en $[n] = \{1, \dots, n\}$.

d) ¿Cómo explica la aparente contradicción?