

Auxiliar 11

Jueves 20 de Diciembre

P1. Prophet Inequality

El problema de “Prophet Inequality” o desigualdad del profeta se puede establecer en la siguiente dinámica.

- 1) Te dan a conocer una distribución F sobre $[0, \infty)^n$.
- 2) Una a una te dan a conocer realizaciones V_1, V_2, V_3 , hasta V_n , donde $V_i \sim F_i$, la i -ésima distribución marginal.
- 3) Un mortal sólo puede elegir una realización y sólo si es la última que fue descubierta.

La medida que usamos para evaluar cuán buena es la estrategia de un mortal es

$$\frac{\mathbb{E}(\text{mortal})}{\mathbb{E}(\max_{i \in [n]} \{V_i\})}.$$

Para las siguientes preguntas, considere que la distribución F debe ser continua si le es útil.

- (a) Deduzca la estrategia óptima para el mortal.
- (b) Considere la siguiente simplificación: Las únicas distribuciones F que le pueden mostrar son distribuciones productos, ie: las variables $V_1, \dots, V_n$ deben ser independientes. Con esta restricción, muestre que existe una estrategia tal que

$$\frac{\mathbb{E}(\text{Mortal})}{\mathbb{E}(\max_{i \in [n]} \{V_i\})} \geq \frac{1}{2}.$$

Más aún, de un ejemplo donde la cota se alcanza.

- (c) Suponga ahora que relajamos la condición de independencia y permitimos correlación negativa entre las variables (¿se vuelve más fácil el problema?), específicamente, permitimos distribuciones F que cumplan que para todo $i \in [n]$ se tenga que

$$\mathbb{P}(V_i \geq a) \leq \mathbb{P}(V_i \geq a | V_1, \dots, V_{i-1} \leq b),$$

para todo $a, b \in [0, \infty)$. Pruebe que se logra la misma cota que la parte anterior.

- (d) Suponga ahora que relajamos la condición de independencia y permitimos correlación positiva entre las variables (¿se vuelve más fácil el problema?). En particular, considere la siguiente instancia. Dado un $\epsilon > 0$ fijo, definimos $X_i = 1/\epsilon^i B(\epsilon^i)$ y consideramos las variables

$$V_i = X_i + \epsilon X_{i+1},$$

donde $X_{n+1} \equiv 0$. Muestre que cualquier regla de threshold fijo no logra obtener una fracción constante (respecto a n) de la esperanza del máximo, es decir: sea como sea que elijamos el threshold, la fracción que obtenemos decrece respecto a n , siendo cero en el límite.

①

AUXILIAR 11, PROPHET INEQUALITY

RAIMUNDO SAONA URMEÑA
18.925.104-7

PROPHET INEQUALITY

Deduzca la estrategia óptima para el mortal.

Por inducción sobre n mostraremos que

$\forall n \geq 1 \quad \forall F$ distribución en $[0, \infty)^n \quad \exists$ estrategia óptima.

Para $n=1$, es directo pues tomamos el valor ofrecido.

Para $n+1$, al ver la primera realización podemos calcular

$$\tilde{F}: [0, \infty)^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \mathbb{P}((X_2, \dots, X_{n+1}) \leq x \mid X_1 = x_1(\omega))$$

$\tilde{F}$ es otra distribución, ahora en $[0, \infty)^n$ y por inducción tenemos estrategia óptima. Luego, si $X_1(\omega)$ es mayor de lo que se obtiene bajo $\tilde{F}$, lo tomamos, si no lo dejamos.

Considere el caso independiente y muestre que

$$\frac{\mathbb{E}(\text{Mortal})}{\mathbb{E}(\text{max})} \geq \frac{1}{2}$$

Tomemos $T > 0$ y definimos

$$\mathbb{P}(V_1, \dots, V_n < T) = \alpha$$

Luego, notamos que para $t < T$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{mortal} > t) &= \mathbb{P}(\text{mortal} > 0) \\ &= 1 - \alpha \geq (1 - \alpha) \mathbb{P}(\text{max} > t) \end{aligned}$$

Para $t \geq T$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{mortal} > t) &= \sum_{i \in [n]} \mathbb{P}(V_i > t, V_1, \dots, V_{i-1} < T) \\ &\geq \alpha \sum_{i \in [n]} \mathbb{P}(V_i > t) \geq \alpha \mathbb{P}(\text{max} > t) \end{aligned}$$

Así, tomando $\alpha = 1/2$ tenemos que

$$\mathbb{E}(\text{mortal}) \geq \frac{1}{2} \mathbb{E}(\text{max})$$

Nota: La estrategia es aceptar el primer valor $\geq T$.

② De un ejemplo que alcance la cota.
Consideremos

$$V_1 \equiv 1$$

$$V_2 = \frac{1}{\varepsilon} B(\varepsilon)$$

Luego, con $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\mathbb{E}(\text{mortal}) = 1$$

$$; \quad \mathbb{E}(\max) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 2$$

¿Y si hay correlación negativa?

Usando la misma demostración, modificamos el análisis para $t \geq \tau$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{mortal} > t) &= \sum_{i \in [n]} \mathbb{P}(V_i > t; V_1, \dots, V_{i-1} < \tau) \\ &= \sum_{i \in [n]} \mathbb{P}(V_1, \dots, V_{i-1} < \tau) \mathbb{P}(V_i > t \mid V_1, \dots, V_{i-1} < \tau) \\ &\geq \mathbb{P}(V_1, \dots, V_n < \tau) \sum_{i \in [n]} \mathbb{P}(V_i > t) \\ &\geq \alpha \mathbb{P}(\max > t) \end{aligned}$$

La intuición es que, bajo correlación negativa el número de variables que son altas al mismo tiempo es bajo, por lo que al elegir una variable grande es más seguro que ésta sea el máximo.

¿Y si hay correlación positiva? En particular, ¿qué pasa en la siguiente instancia?

$$V_i = X_i + \varepsilon X_{i+1} \quad ; \quad X_i \sim \varepsilon^{-i} B(\varepsilon^i), \quad X_{n+1} \equiv 0$$

Tomamos $\tau > 0$ fijo, e identificamos el índice i_τ por:

$$\frac{1}{\varepsilon^{i_\tau}} \leq \tau < \frac{1}{\varepsilon^{i_\tau+1}}$$

pues $\varepsilon < 1$.

Definimos

$$\begin{aligned} p_i &:= \mathbb{P}(\text{mortal toma } V_{i_\tau}, X_i = \varepsilon^{-i}) \leq \varepsilon^i \\ q_i &:= \frac{\mathbb{P}(X_i = \varepsilon^{-i})}{\mathbb{P}(\text{mortal toma } V_{i_\tau}, X_i = \varepsilon^{-i})} = \varepsilon^{-i} \end{aligned}$$

(3)

RAIMUNDO SAONA URMENETH
18.925.104-1

Notemos que

$$E(\text{mortal}) = \sum_{i \in [n]} p_i \frac{1}{\varepsilon^i} + q_{i+1} \varepsilon \frac{1}{\varepsilon^{i+1}}$$

En efecto,

$$E(\text{mortal}) = \sum_{i \in [n]} E(\text{mortal} \mathbb{1}_{\text{tomar } V_i})$$

$$= \sum_{i \in [n]} E((X_i + \varepsilon X_{i+1}) \mathbb{1}_{\text{tomar } V_i})$$

$$= \sum_{i \in [n]} E(X_i \mathbb{1}_{\text{tomar } V_i}) + \varepsilon E(X_{i+1} \mathbb{1}_{\text{tomar } V_i})$$

$$= \sum_{i \in [n]} p_i \frac{1}{\varepsilon^i} + \varepsilon q_{i+1} \frac{1}{\varepsilon^{i+1}}$$

~~$$p_i \frac{1}{\varepsilon^i} + q_i \varepsilon \frac{1}{\varepsilon^i} = E(X_i \mathbb{1}_{\text{tomar } V_i}) + (\varepsilon E(X_i)) + \varepsilon E(X_i \mathbb{1}_{\text{tomar } V_{i-1}})$$~~

de donde,

$$E(\text{mortal}) \leq n\varepsilon + \sum_{i \in [n]} p_i \frac{1}{\varepsilon^i}$$

Ahora, notemos que para $\varepsilon < 1/2$, como $V_i \leq 2 \frac{1}{\varepsilon^i}$,

$$i \leq i_\gamma - 1 \Rightarrow V_i \leq \frac{2}{\varepsilon^i} \leq \frac{2}{\varepsilon^{i_\gamma - 1}} < \frac{1}{\varepsilon^{i_\gamma}} \leq \gamma$$

$$\Rightarrow P(\text{tomar } V_i) = 0$$

$$\Rightarrow p_i = 0.$$

Por otro lado, para $i \geq i_\gamma + 2$, se tiene que

$$X_i = \frac{1}{\varepsilon^i} \Rightarrow V_{i-1} \geq \frac{1}{\varepsilon^{i-1}} \geq \frac{1}{\varepsilon^{i_\gamma + 1}} > \gamma \quad ; i \geq i_\gamma + 2$$

$$\Rightarrow \text{tome } V_{i-1}$$

y así

$$p_i = P(\text{mortal toma } V_i, X_i = \frac{1}{\varepsilon^i}) = 0$$

(4)

Luego,

$$\mathbb{E}(\text{mortal}) \leq n\varepsilon + 2 \leq 3, \quad \varepsilon \leq \frac{1}{n}.$$

Por otra lado,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\max) &= \sum_{i \in [n]} \mathbb{E}(V_i \mathbb{1}_{V_i > 0} \mathbb{1}_{V_{i+1}, \dots, V_n = 0}) \\ &= \sum_{i \in [n]} \frac{1}{\varepsilon^i} \mathbb{P}(X_i = \frac{1}{\varepsilon^i}) \mathbb{P}(V_{i+1}, \dots, V_n = 0) \\ &= \sum_{i \in [n]} \mathbb{P}(X_{i+1}, \dots, X_n = 0) \\ &= \sum_{i \in [n]} 1 - \mathbb{P}(\exists j \in \{i+1, \dots, n\} \text{ tq } X_j \neq 0) \\ &\geq \sum_{i \in [n]} 1 - \sum_{j=i+1}^n \mathbb{P}(X_j \neq 0) \\ &= \sum_{i \in [n]} 1 - \sum_{j=i+1}^n \varepsilon^j \\ &= \sum_{i \in [n]} 1 - \varepsilon^{i+1} \sum_{j=0}^{n-i-1} \varepsilon^j \\ &= \sum_{i \in [n]} 1 - \varepsilon^{i+1} \left(\frac{1 - \varepsilon^{n-i}}{1 - \varepsilon} \right) \\ &\geq \sum_{i \in [n]} 1 - \varepsilon^{i+1} \left(\frac{1}{1 - \varepsilon} \right) \\ &= n - \frac{\varepsilon^2}{1 - \varepsilon} \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon^i \\ &= n - \frac{\varepsilon^2}{1 - \varepsilon} \frac{1 - \varepsilon^n}{1 - \varepsilon} \\ &\geq n - \frac{\varepsilon^2}{(1 - \varepsilon)^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} n - 1. \end{aligned}$$