

Auxiliar 11

Jueves 20 de Diciembre

P1. Prophet Inequality

El problema de “Prophet Inequality” o desigualdad del profeta se puede establecer en la siguiente dinámica.

- 1) Te dan a conocer una distribución F sobre $[0, \infty)^n$.
- 2) Una a una te dan a conocer realizaciones V_1, V_2, V_3 , hasta V_n , donde $V_i \sim F_i$, la i -ésima distribución marginal.
- 3) Un mortal sólo puede elegir una realización y sólo si es la última que fue descubierta.

La medida que usamos para evaluar cuán buena es la estrategia de un mortal es

$$\frac{\mathbb{E}(\text{mortal})}{\mathbb{E}(\max_{i \in [n]} \{V_i\})}.$$

Para las siguientes preguntas, considere que la distribución F debe ser continua si le es útil.

- (a) Deduzca la estrategia óptima para el mortal.
- (b) Considere la siguiente simplificación: Las únicas distribuciones F que le pueden mostrar son distribuciones productos, ie: las variables $V_1, \dots, V_n$ deben ser independientes. Con esta restricción, muestre que existe una estrategia tal que

$$\frac{\mathbb{E}(\text{Mortal})}{\mathbb{E}(\max_{i \in [n]} \{V_i\})} \geq \frac{1}{2}.$$

Más aún, de un ejemplo donde la cota se alcanza.

- (c) Suponga ahora que relajamos la condición de independencia y permitimos correlación negativa entre las variables (¿se vuelve más fácil el problema?), específicamente, permitimos distribuciones F que cumplan que para todo $i \in [n]$ se tenga que

$$\mathbb{P}(V_i \geq a) \leq \mathbb{P}(V_i \geq a | V_1, \dots, V_{i-1} \leq b),$$

para todo $a, b \in [0, \infty)$. Pruebe que se logra la misma cota que la parte anterior.

- (d) Suponga ahora que relajamos la condición de independencia y permitimos correlación positiva entre las variables (¿se vuelve más fácil el problema?). En particular, considere la siguiente instancia. Dado un $\epsilon > 0$ fijo, definimos $X_i = 1/\epsilon^i B(\epsilon^i)$ y consideramos las variables

$$V_i = X_i + \epsilon X_{i+1},$$

donde $X_{n+1} \equiv 0$. Muestre que cualquier regla de threshold fijo no logra obtener una fracción constante (respecto a n) de la esperanza del máximo, es decir: sea como sea que elijamos el threshold, la fracción que obtenemos decrece respecto a n , siendo cero en el límite.