**IN790-1: Modelos Estocásticos en Sistemas de Ingeniería**
**Profesor:** J. Correa.
**Auxiliares:** I. Bortnic y R. Saona.

# Auxiliar 9

Jueves 06 de Diciembre

## P1. Intuición y dados

---

Considere una persona que lanza un dado un billón de veces y va anotando la suma acumulada hasta el momento después de cada lanzamiento, ¿cuál de las siguientes probabilidades es mayor:

**(a)** $\mathbb{P}$( llega a sumar 2 ),

**(b)** $\mathbb{P}$( llega a sumar 10002 ),

**(c)** $\mathbb{P}$( llega a sumar 10000002 ) ?

## P2. Cadenas de Markov y Procesos de Renovación

---

Considere una cadena de Markov en dos estados, $\{1, 2\}$, cuya matriz de transición es $P = \begin{pmatrix} ,8 & ,2 \\ ,4 & ,6 \end{pmatrix}$. Suponga que la cadena comienza en el estado 1 y defina $N_t$ como el número de veces que la cadena regresa a 1 antes de tiempo $t$.

**(a)** Muestre que $(N_t - 1)_{t\geq 0}$ es un proceso de renovación.

**(b)** Calcule $\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t}$.

## P3. Eventos bonitos, ¿cuánto los espero?

---

Imagínese que usted y su amiga están conversando al lado de una fuente durante el fin de semana. La fuente consiste en 6 bombas de agua dispuestas de forma triangular, con tres en la base, dos al centro y uno en la punta. Cada bomba está programada para cambiar la presión con la que expulsa el agua cada 4 segundos, eligiendo uniformemente al azar una de las 4 posibles presiones (débil, medio, fuerte y muy fuerte). Más aún, las bombas no cambian de presión al mismo tiempo, sino que funcionan de tal manera que primero cambia la de la punta, después de un segundo cambian las del centro y, después de otro segundo, cambian las de la base.

Mientras conversaba con su amiga, ella veía la fuente y de repente se maravilla, había visto un patrón que le encantó: débil, medio-medio y fuerte-fuerte-fuerte. Usted se apura a girar la cabeza, pero su amiga le dice que la magia está en haber descubierto cómo se iba generando el patrón, ¿cuánto tiempo tendrá que esperar para vivir este proceso de nuevo?

## P4. Reconociendo Procesos de renovación

---

Considere una carretera de una sola pista e imagínese que hubo un accidente y hay una fila de autos que va creciendo en el tiempo. Para un $t$ fijo, considere el número de autos a distancia $t$ el accidente, ¿cómo se comporta esta variable?, ¿qué podemos decir de ella? Aplique los teoremas de límites vistos en clases.

RAIMUNDO SAONA URMENETA
18.925.104-1

(1)

# AUXILIAR 9

## INTUICIÓN y DADOS

Considere $X \sim U(\{1,\dots,6\})$ y un proceso de renovación con $(X_n)_{n\geq 1}$ $X_n \sim X$ i.id. Determine cuál es mayor

$$\mathbb{P}(\exists n \;\; S_n = 2) \quad \text{ó} \quad \mathbb{P}(\exists n \;\; S_n = 10002)$$

Por el teorema de Blackwell, sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\exists k \;\; S_k = n) = \frac{1-\mathbb{P}(X=0)}{\mathbb{E}(X)} = \frac{1}{3.5} = \frac{2}{7}$$

Por otro lado,

$$\mathbb{P}(\exists n \;\; S_n = 2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

de donde el segundo seguramente es mayor.

## CADENAS DE MARKOV y PROCESOS DE RENOVACIÓN

Considere $(M_n)_{n\geq 1}$ una cadena de Markov sobre $\{1,2\}$ con transición $P = \begin{pmatrix} .8 & .2 \\ .4 & .6 \end{pmatrix}$ y $\mu = \delta_1$.

Defina

$$N_t := |\{n \leq t : M_n = 1\}| = |\{n \leq t : M_n = 1\}|$$

Muestre que

$(N_t - 1)_{t>0}$ es un proceso de renovación.

Definimos $T^1 := \inf\{n \geq 1 : M_n = 1\}$

$$T^{i+1} := \inf\{n \geq T^i + 1 : M_n = 1\} - T^i$$

los tiempos de retorno al estado 1. Luego, si definimos

$$\tilde{X}_i := T^i \quad ; \quad \tilde{S}_n := \sum_{i=1}^{n} X_i \; ; \quad \tilde{N}_t := \sup\{n : S_n \leq t\}$$

tenemos que $\tilde{N}_t$ es proceso de renovación, porque $(\tilde{X}_i)_{i\geq 1}$ son iid ya que $(M_n)_{n\geq 1}$ es cadena de Markov.

(2)

Notar que

$$\begin{aligned}\tilde{N}_t &= \sup\{n : S_n \le t\} \\ &= \max\{n : \sum_{i=1}^{n} Y^i \le t\} \qquad ; \ X_i \ge 1. \\ &= |\{n \le t : M_n = 1\}| - 1 \qquad ; \ M_0 = 1. \\ &= N_t - 1.\end{aligned}$$

Calcule $\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t}$

Pues bien,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\tilde{N}_t}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}(X)} = \frac{1}{\mathbb{E}(Y^1)} = \pi_1$$

donde $\pi$ es la distribución invariante de $(M_n)$, ie:

$$\pi^t P = \pi^t$$

Calculando, $\begin{pmatrix}\pi_1\\ \pi_2\end{pmatrix}^t \begin{pmatrix}.8 & .2\\ .4 & .6\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\left(8\pi_1 + 4\pi_2 \ , \ 2\pi_1 + 6\pi_2\right)$,

de donde

$$\begin{pmatrix}8\pi_1 + 4\pi_2\\ 2\pi_1 + 6\pi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\pi_1\\ 10\pi_2\end{pmatrix},$$

o bien,

$$\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 2 & -4\end{pmatrix}\pi = 0$$

y así,

$$\pi = (2/3 \ , \ 1/3) \ .$$

(3)

# Auxiliar 9

Raimundo Saona Urmeneta

## Eventos Bonitos, ¿cuánto los espero?

*Descripción en auxiliar*

¿Cuánto tiempo espero para ver el proceso de nuevo?

Consideremos

$$Y_n^1 \sim U([4]) \quad ; \quad Y_n^2 \sim U\left(\left\{\binom{1}{1}, \binom{1}{2}, \binom{1}{3}, \binom{1}{4}, \binom{2}{1}, \dots, \binom{4}{4}\right\}\right) \quad ; \quad Y_n^3 \sim U\left(\binom{[4]}{3}\right)$$

i.i.d. i.i.d. i.i.d.

y definimos

$$R_n = \begin{cases} 1 & \text{si: } \{Z_n, Z_{n-1}, Z_{n-2}\} = \left\{1, \binom{2}{2}, \binom{3}{3}\right\} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

donde

$$Z_1 = Y_1^1, \quad Z_2 = Y_1^2, \quad Z_3 = Y_1^3, \quad Z_4 = Y_2^1, \dots$$

$$Z_n = Y^{[n]_{\neq 3}}_{\left[\frac{n-1}{3}\right]+1} \qquad \text{(en términos formales)}$$

$R_n$ corresponde a una recompensa de 1 si es que a tiempo $n$ veo la fuente y se encuentra en el estado deseado.

Notar que

$$\mathbb{E}(R_n) = \mathbb{P}(R_n = 1) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^3 = 2^{-12}.$$

y más aún, por ley de los grandes números, pues $(R_n)$ es estacionaria y ergódica (o bien porque la $\sigma$-álgebra de la cola es trivial),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i}{n} = \mathbb{E}(R) = 2^{-12}.$$

(4)

Por otro lado, definimos un ciclo como el periodo entre desde que se acaba de aparecer el patrón deseado hasta que reaparece completo de nuevo, ie: vemos $1, \binom{2}{2}, \binom{3}{3}$, en ese orden, en 3 tiempos consecutivos.

Notar que

$$R_{C_n} = A + B + 1$$

donde

$$A = \mathbb{1}[\text{reaparece "1" luego del patrón}]$$
$$B = \mathbb{1}[\text{reaparece "}1, \tbinom{2}{2}\text{" luego del patrón}]$$

Así,

$$\mathbb{E}(R_{C_n}) = 1/4 + 1/4\,(1/4)^2 + 1$$
$$= 2^{-6}(2^6 + 2^4 + 1)$$

Por otro lado, llamamos

$$X_n := \text{tiempo de duración del ciclo } n,$$

que son i.i.d. Así, definiendo

$$R_t := \sum_{n=1}^{N_t} R_{C_n}$$

se tiene

$$\lim_{t\to\infty} \frac{R_t}{t} = \frac{\mathbb{E}(R_{C_n})}{\mathbb{E}(X)}$$

Ahora bien,

$$R_t = \sum_{n=1}^{N_t} R_{C_n} \approx \sum_{n=1}^{\lfloor t \rfloor} R_n$$

(diferencia máxima de 3, pues $R_{C_n} \in \{1,2,3\}$)

de donde

$$\frac{\mathbb{E}(R_{C_n})}{\mathbb{E}(X)} = \mathbb{E}(R)$$

y así,

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\mathbb{E}(R_C)}{\mathbb{E}(R)} = 2^6(2^6 + 2^4 + 1) = 5184 \quad [\text{seg}]$$
$$= 86.4 \quad [\text{min}]$$
$$\approx 1.5 \quad [\text{hr}].$$

(5)

# Auxiliar 9

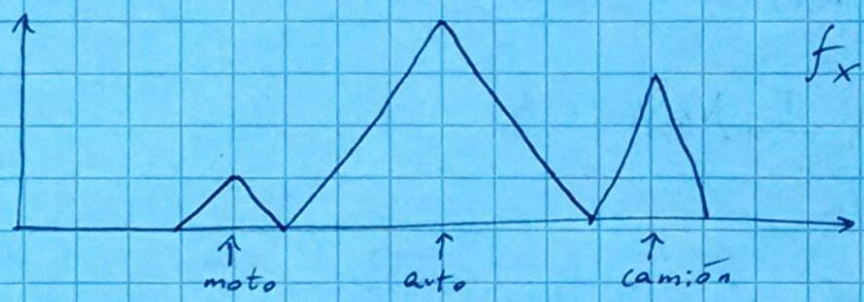
Raimundo Saona Urmeneta
18.925.104-1

## Reconociendo Procesos de Renovación

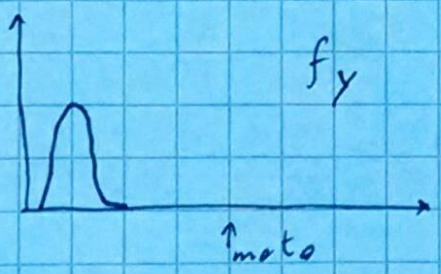
Modele el atochamiento de autos en una pista. En particular, ¿cuántos autos hay a distancia $t$ de un accidente?

Si cada auto usa un espacio $a \in \mathbb{R}_+$, entonces hay espacio para $\left\lfloor \frac{t}{a} \right\rfloor$ autos.

Modelemos el largo de un auto por una variable aleatoria cuya distribución está dada por las medidas de los vehículos que son importados a Chile con una densidad de la siguiente forma:




A su vez, el espacio que un auto deja entre la punta del auto y el objeto de delante se puede medir experimentalmente en atochamientos anteriores y obtener



(6)

Definimos

$$Z_n = X_n + Y_n \quad ; \quad X_n \sim X, \; Y_n \sim Y.$$

como el espacio que ocupa el vehículo $n$.

Así, $(N_t)_{t\geq 0}$, dado por $(Z_n)_{n\geq 1}$ describe:

$N_t =$ "# autos a distancia $t$ del accidente".

Reconocemos tres teoremas límites:

$$\left(\frac{N_t}{t}\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{\mathbb{E}(Z)}$$

* Interpretar estos resultados para este caso *

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}(N_t)}{t} \to \frac{1}{\mathbb{E}(Z)}$$

$$\left(\frac{N_t - t/\mathbb{E}(Z)}{\sqrt{t}\sqrt{\frac{\mathrm{Var}(Z)}{\mathbb{E}(Z)^3}}}\right) \xrightarrow{F} \mathcal{N}(0,1)$$