

Auxiliar 9

Jueves 06 de Diciembre

P1. Intuición y dados

Considere una persona que lanza un dado un billón de veces y va anotando la suma acumulada hasta el momento después de cada lanzamiento, ¿cuál de las siguientes probabilidades es mayor:

- (a) $\mathbb{P}(\text{llega a sumar } 2)$,
- (b) $\mathbb{P}(\text{llega a sumar } 10002)$,
- (c) $\mathbb{P}(\text{llega a sumar } 10000002)$?

P2. Cadenas de Markov y Procesos de Renovación

Considere una cadena de Markov en dos estados, $\{1, 2\}$, cuya matriz de transición es $P = \begin{pmatrix} .8 & .2 \\ .4 & .6 \end{pmatrix}$. Suponga que la cadena comienza en el estado 1 y defina N_t como el número de veces que la cadena regresa a 1 antes de tiempo t .

- (a) Muestre que $(N_t - 1)_{t \geq 0}$ es un proceso de renovación.
- (b) Calcule $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t}{t}$.

P3. Eventos bonitos, ¿cuánto los espero?

Imagínese que usted y su amiga están conversando al lado de una fuente durante el fin de semana. La fuente consiste en 6 bombas de agua dispuestas de forma triangular, con tres en la base, dos al centro y uno en la punta. Cada bomba está programada para cambiar la presión con la que expulsa el agua cada 4 segundos, eligiendo uniformemente al azar una de las 4 posibles presiones (débil, medio, fuerte y muy fuerte). Más aún, las bombas no cambian de presión al mismo tiempo, sino que funcionan de tal manera que primero cambia la de la punta, después de un segundo cambian las del centro y, después de otro segundo, cambian las de la base.

Mientras conversaba con su amiga, ella veía la fuente y de repente se maravilla, había visto un patrón que le encantó: débil, medio-medio y fuerte-fuerte-fuerte. Usted se apura a girar la cabeza, pero su amiga le dice que la magia está en haber descubierto cómo se iba generando el patrón, ¿cuánto tiempo tendrá que esperar para vivir este proceso de nuevo?

P4. Reconociendo Procesos de renovación

Considere una carretera de una sola pista e imagínese que hubo un accidente y hay una fila de autos que va creciendo en el tiempo. Para un t fijo, considere el número de autos a distancia t el accidente, ¿cómo se comporta esta variable?, ¿qué podemos decir de ella? Aplique los teoremas de límites vistos en clases.