

①

AUXILIAR 8

RAIMUNDO SAGNA URMENETA
18.925.104-1

REPASO PROCESOS DE RENOVACIÓN

Considérese $(X_n)_{n \geq 1}$ iid. con $X \sim F$ tal que
 $X \geq 0$ IP-C.S. $P(X=0) < 1$.

Se definen

$$S_n := \sum_{i \in [n]} X_i$$

$$N_t := \sup \{ n : S_n \leq t \}$$

Notar que

$$S_{N_t} < S_{1+N_t}$$

Algunas propiedades básicas son:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{E(X)}$$

También, que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E(N_t)}{t} = \frac{1}{\mu}$$

(0.5)

P4) CRECIMIENTO CONTEO DE RENOVACIONES

Considera $X \sim F$ ~~(donde $X \geq 0$, $P(X=0) < 1$ y $\sup(X)$ es)~~
 (no acotada) Tome un proceso de renovación dado por F
 y muestre que
 $\forall \theta > 0 \quad \forall t > 0 \quad \mathbb{E}(e^{\theta M_t}) < \infty$

En efecto, sea $\varepsilon > 0$, definimos

$$q := \frac{P(X > \varepsilon)}{P(X > 0)} = P(X > \varepsilon)$$

Notemos que q puede ser tan cercano a 1 como queramos.

Definimos

$$Y_i := \varepsilon \mathbb{1}_{X_i \geq \varepsilon}$$

y llamamos $(M_t)_{t \geq 0}$ el proceso asociado. Notar que

$$N_t \leq M_t \quad \forall t \geq 0$$

por lo que basta probar que $\mathbb{E}(\exp(\theta M_t)) < \infty$.

Notamos que

$$M_\varepsilon \sim \text{Geo}(q)$$

y en general,

$$M_t \sim \sum_{i=1}^{\lfloor t/\varepsilon \rfloor} W_i \quad ; \quad W_i \sim \text{Geo}(q) \text{ i.i.d.}$$

luego,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{\theta M_t}) &= \prod_{i=1}^{\lfloor t/\varepsilon \rfloor} \mathbb{E}(e^{\theta W_i}) \\ &= [\mathbb{E}(e^{\theta M_\varepsilon})]^{\lfloor t/\varepsilon \rfloor} \end{aligned} \quad ; \quad W_i \sim \text{Geo}(q)$$

de donde basta que $\mathbb{E}[\exp(\theta M_\varepsilon)] < \infty$

Pues bien,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{\theta M_\varepsilon}) &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{\theta k} (1-q)^{k-1} q \\ &= \frac{q}{1-q} \sum_{k=1}^{\infty} (e^{\theta} (1-q))^k \end{aligned}$$

de donde, $\mathbb{E}(e^{\theta M_\varepsilon}) < \infty \Leftrightarrow e^{\theta} (1-q) < 1 \Leftrightarrow 1 - e^{-\theta} < q$.

①

AUXILIAR 8RAIMUNDO SAONA URMENETA
18.925.104-1P11 CALENTAMIENTOConsidere $(X_n)_{n \geq 0}$ con $X \sim \text{Bernoulli}(p)$.Calcule la distribución de N_t .Notemos primero que dado $m \in \mathbb{N}$,

$$N_t = N_m \quad \forall t \in [m, m+1)$$

pues $X \in \{0, 1\}$ IP-C.S.

Es decir, como

$$\forall n \geq 0 \quad S_n \in \mathbb{N} \quad \text{IP-C.S.}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} N_t &= \sup \{n : S_n \leq t\} \\ &= \sup \{n : S_n \leq \lfloor t \rfloor\} \end{aligned}$$

Llamemos entonces $m = \lfloor t \rfloor$ y notemos que

$$N_m \geq m$$

IP-C.S.

o en otras palabras

"necesitamos al menos m variables
para sumar m ".

Por otro lado,

$$N_m \in \{m, m+1, \dots\} \quad \text{IP-C.S.}$$

ie: es una variable discreta.

Notemos que

$$P(N_m = m) = p^m - p$$

$$P(N_m = m+1) = \binom{m+1}{1} (1-p) p^m \cdot p$$

y en general

$$P(N_m = m+k) = \binom{m+k}{k} (1-p)^k p^m \cdot p$$

② Encuentre cuándo la siguiente expresión tiene sentido.

$$P(S_i = j \mid N_t = k)$$

Ya que $N_m \geq m$, o en general

$$N_t \geq \lfloor t \rfloor$$

IP-C.S.

tenemos que, necesariamente $k \geq \lfloor t \rfloor$.

Por otro lado,

$$S_i \leq i$$

de donde $j \leq i$.

Por último, se deben distinguir dos casos:
 $i \in \{1, \dots, k+1\}$ o $i \geq k+2$.

Asumamos que $i \geq k+2$, luego

$$S_i = S_{k+1} + (X_{k+2} + \dots + X_{k+2+i-(k+2)}) = S_{k+1} + \bar{S}_{i-k-1}$$

y notando que

$$N_t = k$$

$\Leftrightarrow$

$$S_k \leq t \quad \wedge \quad S_{k+1} > t$$

$\Leftrightarrow$

$$S_k = \lfloor t \rfloor \quad \wedge \quad S_{k+1} = \lfloor t \rfloor + 1$$

tenemos que

$$P(S_i = j \mid N_t = k) = IP(\lfloor t \rfloor + 1 + \bar{S}_{i-k-1} = j \mid N_t = k)$$

(indep) $= IP(S_{i-k-1} = j - (\lfloor t \rfloor + 1))$.

y sabemos que

$$S_i \sim \text{BIN}(i, p)$$

3

RAIMUNDO SAONA URMENETA
18.925.104-1

P1

Asumamos que $i \in \{1, \dots, k+1\} = [k+1]$.

De nuevo, notar que

$$P(S_{k+1} = j | N_t = k) = P(S_{k+1} = j | N_t = k)$$

por lo que es suficiente estudiar $i \in [k]$.

Llamemos $m := |L_t|$ y notemos que

$$P(S_1 = 1 | N_m = k) = \frac{k}{m}$$

$$P(S_1 = 0 | N_m = k) = \frac{m-k}{m}$$

y en general,

$$P(S_i = j | N_m = k) = \frac{\binom{k}{j} \binom{m-k}{i-j}}{\binom{m}{i}}$$

P3) PARADOJA DE LA INSPECCIÓN

* DISCUSIÓN *

Lle gar a probar que

$$P(X_{1+N_t} > x) \geq P(X > x)$$

y notar que

$$P(X_{1+N_t} > x) = P(X > x | X > 0) = \frac{P(X > x)}{P(X > 0)} \geq P(X > x)$$

* Explicar X_{1+N_t} "domina estocásticamente a" X *

Si el paradero midece el tiempo medio entre micro y micro y, por otro lado, usted midece el tiempo medio que espera la micro desde llegar al paradero.
¿Cuál es mayor?

P2 ECUACIÓN DE RENOVACIÓN

Muestre que

$$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-x) dF(x)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} m(t) = E(N_t) &= \int_0^\infty E(N_t | X_1 = x) dF(x) \\ &= \int_0^t E(1 + \bar{N}_{t-x} | X_1 = x) dF(x) + \int_t^\infty E(0 | X_1 = x) dF(x) \\ (\text{indep}) &= \int_0^t 1 + E(N_{t-x}) dF(x) \\ &= F(t) + \int_0^t m(t-x) dF(x) \end{aligned}$$

Asuma F es abs. continua.

En este caso, $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$

y así,

$$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-x) f(x) dx$$

Notamos que

$$x > t \Rightarrow$$

$$m(t-x) = 0$$

$$x < 0 \Rightarrow$$

$$f(x) = 0$$

de donde

$$\int_0^t m(t-x) f(x) dx = \int_{-\infty}^\infty m(t-x) f(x) dx = (m * f)(t)$$

y así

$$m = F + m * f$$