Control 1: IN790 Modelos Estocásticos en Sistemas de Ingeniería 2018-02
Profesor: José Correa
Auxiliares: Ian Bortnic, Raimundo Saona

P1. Las siguientes preguntas son independientes.

1. Sea $(Z_n)_{n\geq 1}$ una submartingala con respecto a una filtración $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ y sea f una función convexa, creciente y tal que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq A|x| + B$, con $A, B \in \mathbb{R}$. Pruebe que $(f(Z_n))_{n\geq 1}$ también es una submartingala.

2. Sean $(X_n)_{n\geq 1}$ variables aleatorias i.i.d. Bernoulli de parametro $p \in [0,1]$. Demuestre que para todo $n \geq 1$
$$\mathbb{E}\left(e^{tX_n}\right) = 1 - p + pe^t$$
y concluya la siguiente cota tipo Chernoff, para $t > 0$.
$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > a\right) \leq \frac{(1-p+pe^t)^n}{e^{ta}}$$

3. Sean X, Y vv.aa. i.i.d. absolutamente continuas. Pruebe que la variable aleatoria definida por $\mathbb{E}(X|\mathbb{1}_{X>Y})$ es $\mathbb{E}(\max\{X,Y\})$ con probabilidad $1/2$ y $\mathbb{E}(\min\{X,Y\})$ con probabilidad $1/2$.

P2. Sean $(X_n)_{n\geq 1}$ variables aleatorias i.i.d. con $\mathbb{E}(X) = 0$ y $Var(X) = \sigma^2$. Sea T un tiempo de parada tal que $\mathbb{E}(T) < \infty$. Como es habitual definimos $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ y $S_0 = 0$.

1. Pruebe que $Z_n := S_n^2 - \sigma^2 n$ es una martingala respecto a la filtración natural de $(X_n)_{n\geq 1}$.

2. Concluya que $Var(S_T) = \sigma^2\mathbb{E}(T)$.

3. Consideremos $T := \inf\{n \geq 1 : S_n \leq S_{n-1}\}$. Pruebe que T es un tiempo de parada con $\mathbb{E}(T) < \infty$.

4. Concluya que $Var(S_T) = \frac{\sigma^2}{p}$, donde $p = \mathbb{P}(X \leq 0)$. Interprete este resultado para el caso de un jugador que enfrenta una ruleta cuyo resultado es rojo o negro con probabilidad $1/2$.

P3. Sean $(X_n)_{n\geq 1}$ variables aleatorias i.i.d. que valen 1 con probabilidad $p > 1/2$ y -1 con probabilidad $1-p$. En este problema demostraremos que con alta probabilidad $S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$ es grande (aún cuando p sea muy cercano a $1/2$).

1. Pruebe que $Z_n := \sum_{i=1}^{n}(X_i - (2p-1))$ es una martingala, respecto a la filtración natural de $(X_n)_{n\geq 1}$, de media cero.

2. Identifique los parámetros adecuados para aplicar el Teorema de Hoeffding-Azuma.

3. Concluya que
$$\mathbb{P}(S_n > n(p-1/2)) \geq 1 - exp\left(\frac{-n(p-1/2)^2}{2}\right).$$