

Control 1: IN790 Modelos Estocásticos en Sistemas de Ingeniería 2018-02

Profesor: José Correa

Auxiliares: Ian Bortnic, Raimundo Saona

P1. Una sucesión de variables aleatorias X_n , $n \geq 1$, converge en *media cuadrática* a una v.a. X (También llamada convergencia en L_2), denotada por $(X_n) \rightarrow_{cm} X$, ssi $(\mathbb{E}[(X_n - X)^2]) \rightarrow_n 0$.

- (i) Usando la desigualdad de Markov demuestre que la convergencia en media cuadrática implica convergencia en probabilidad.
- (ii) Pruebe ahora que la recíproca no se cumple. Para ello considere una v.a. $U \sim \text{Unif}(0,1)$ y tome $X_n = \sqrt{n} \mathbb{1}_{\{U \in (0,1/n)\}}$ y pruebe que (X_n) converge a 0 en probabilidad pero no en media cuadrática.
- (iii) Determine si la convergencia en media cuadrática implica la convergencia casi segura. Determine también si la convergencia en media cuadrática implica la convergencia en distribución.

P2. En este problema estudiaremos una versión del Teorema del límite central cuando la varianza es desconocida. Para ello partiremos por un resultado más básico.

- (i) Consideremos una v.a. $U \sim \text{Unif}(-1,1)$ y sea $X_n = U$ y $Y_n = (-1)^n X_n$. Pruebe que ambas sucesiones de v.a. convergen en distribución a U , pero que sin embargo la v.a. $Z_n = X_n + Y_n$ no converge en distribución.
- (ii) Construya ahora un ejemplo donde $X_n \rightarrow_d X$, $Y_n \rightarrow_d Y$ pero $Z_n = X_n Y_n$ no converge en distribución a XY .
- (iii) (Bonus) Un caso particular donde si se cumple que la convergencia en distribución implica la convergencia en distribución de la suma y del producto es cuando una de las sucesiones converge a una constante. Esto se conoce como Teorema de Slutsky: Sea $c \in \mathbb{R}$. Si $X_n \rightarrow_d X$ y $Y_n \rightarrow_d c$ entonces $X_n + Y_n \rightarrow_d X + c$ y $X_n Y_n \rightarrow_d cX$. Pruebe este resultado.
- (iv) Considere ahora una sucesión de v.a. iid X_n , $n \geq 1$ de media $\mu = 0$ y varianza σ^2 (sin embargo no conocemos la varianza). Sea $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Pruebe que $Z_n = \frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}$ converge en distribución a una v.a. normal $N(0,1)$.
- (v) Tomemos ahora $R_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ que es básicamente una estimación de la varianza. Use la ley de los grandes números para probar que $(R_n) \rightarrow_P \sigma^2$.
- (vi) Usando la parte (iii) pruebe finalmente que $T_n = \frac{S_n}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}$ converge en distribución a una v.a. normal $N(0,1)$.

Indicación: en este problema podría ser útil usar frecuentemente el teorema de la función continua. Si f es una función continua y $(X_n) \rightarrow_ X$ entonces $(f(X_n)) \rightarrow_* f(X)$.*

P3. Un grafo aleatorio $G(n,p)$ es un grafo en n vértices donde cada arista está presente con probabilidad p . Un triángulo en un grafo es un conjunto de tres vértices todos conectados entre sí.

En este problema consideraremos $p = n^{-\alpha}$ y probar que para n grande, si $\alpha > 1$ entonces es muy probable que $G(n, p)$ no tenga triángulos, mientras que si $\alpha < 1$ es muy probable que sí los tenga.

- (i) Sea N_{Δ} la v.a. que denota el número de triángulos de $G(n, p)$. Usando la linealidad de la esperanza pruebe que $\mathbb{E}(N_{\Delta}) = \binom{n}{3}p^3$.
- (ii) Concluya que para $\alpha > 1$, $\mathbb{P}(N_{\Delta} \geq 1) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.
- (iii) Pruebe que $\mathbb{P}(N_{\Delta} = 0) \leq \frac{\text{Var}(N_{\Delta})}{(\mathbb{E}[N_{\Delta}])^2}$
- (iv) Ahora calcule $\text{Var}(N_{\Delta})$. Para ello escriba esta varianza como la suma de las covarianzas de todos los pares posibles de triángulos y observe que estos triángulos pueden tener 0, 1 ó 3 aristas en común. Luego pruebe que si el número de aristas en comun es 0 la covarianza es 0, si el número de aristas en común es 1 la covarianza es $p^5 - p^6$, y si el número de aristas en común es 3 la covarianza es $p^3 - p^6$. Use esto para concluir que $\text{Var}(N_{\Delta})$ es aproximadamente $c_1 n^4(p^5 - p^6) + c_2 n^3(p^3 - p^6)$, donde c_1 y c_2 son constantes.
- (v) Concluya que para $\alpha < 1$, $\mathbb{P}(N_{\Delta} = 0) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.