IN790-1: Modelos Estocásticos en Sistemas de Ingeniería
Profesor: J. Correa.
Auxiliares: I. Bortnic y R. Saona.

Auxiliar 6

Jueves 08 de Noviembre

P1. Otras condiciones suficientes para el teorema de tiempo opcional

---

En clases se ha visto que dada una martingala $(Z_n)_{n\geq 1}$ sobre una filtración $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ y T un tiempo de parada, se tiene que

$$\mathbb{E}(Z_T) = \mathbb{E}(Z_1)\,,$$

si es que se cumple **ALGUNA** de las siguientes condiciones:

(a) $(Z_{\min(n,T)}) = (Z_{n\wedge T})$ son uniformemnte acotadas en L_1.

(b) T es acotado.

(c) $\mathbb{E}(T) < \infty$ y hay una constante $M < \infty$ tal que para todo $n \geq 1$

$$\mathbb{E}(|Z_{n+1} - Z_n||\mathcal{F}_n) \leq M\,.$$

En todos los casos, la demostración sigue del teorema de convergencia dominada, ¿te acuerdas?

Ahora probaremos que otra condición suficiente para que la igualdad $\mathbb{E}(Z_T) = \mathbb{E}(Z_1)$ sea cierta. Si se cumplen **AMBAS** condiciones siguientes:

(a) Z_T es integrable, ie: $\mathbb{E}(|Z_T|) < \infty$.

(b) $(\mathbb{E}(Z_n \mathbb{1}_{T>n})) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

se tiene la igualdad $\mathbb{E}(Z_T) = \mathbb{E}(Z_1)$.

Bonus: ¿Puede exponer una martingala que cumple la primera, pero no la segunda condición?

P2. ¿Perdemos antes de ganar? (Propuesto)

Imagínese que usted necesita una fortuna 10 millones de pesos para iniciar su emprendimiento, pero no dispone de ni un solo peso. En el casino, le ofrecen jugar un juego donde puede apostar sólo diez mil pesos a la vez: si la moneda sale cara, se queda con el dinero, si no, se le descuenta de sus fondos. Más aún, le permiten tener un crédito de hasta un millón de pesos. Y aún hay más, ¡¡¡la moneda está cargada a su favor con probabilidad $p > 1/2$!!!

(a) ¿Con qué probabilidad usted gana lo que necesita antes de usar todo el crédito?

(b) Ya que el juego está cargado a su favor, la probabilidad de nunca perder es positiva, ¿cuánto es?

(c) De tener dinero infinito, ¿cuántas jugadas le toma, en esperanza, llegar a ganar los 10 millones?

P3. ¿Puedo estar siempre primero?

Considere el siguiente juego de casino. Se escogen dos números al azar n y m en el conjunto $\{10, \ldots, 20\}$ con reposición e independientemente y usted no es informado de ellos. Luego, se prepara una urna con n bolas felices y m bolas tristes. Se contarán luego las bolas una a una, como en una votación, y usted gana si es que las bolas felices siempre fueron más que las tristes en este proceso de conteo. Si es así, se le pagará un millón de pesos, ¿cuánto está dispuesto a pagar por jugar este juego?

P4. P2, Control 1

P2. En este problema estudiaremos una version del Teorema del límite central cuando la varianza es desconocida. Para ello partiremos por un resultado más básico.

(i) Consideremos una v.a. $U \sim \text{Unif}(-1,1)$ y sea $X_n = U$ y $Y_n = (-1)^n X_n$. Pruebe que ambas sucesiones de v.a. convergen en distribución a U, pero que sin embargo la v.a. $Z_n = X_n + Y_n$ no converge en distribución.

(ii) Construya ahora un ejemplo donde $X_n \to_d X$, $Y_n \to_d Y$ pero $Z_n = X_n Y_n$ no converge en distribución a XY.

(iii) (Bonus) Un caso particular donde si se cumple que la convergencia en distribución implica la convergencia en distribución de la suma y del producto es cuando una de la sucesiones converge a una constante. Esto se conoce como Teorema de Slutzky: Sea $c \in \mathbb{R}$. Si $X_n \to_d X$ y $Y_n \to_d c$ entonces $X_n + Y_n \to_d X + c$ y $X_n Y_n \to_d cX$. Pruebe este resultado.

(iv) Considere ahora una sucesión de v.a. iid X_n, $n \geq 1$ de media $\mu = 0$ y varianza σ^2 (sin embargo no conocemos la varianza). Sea $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Pruebe que $Z_n = \frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}$ converge en distribución a una v.a. normal $N(0,1)$.

(v) Tomemos ahora $R_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$ que es básicamente una estimación de la varianza. Use la ley de los grandes números para probar que $(R_n) \to_P \sigma^2$.

(vi) Usando la parte (iii) pruebe finalmente que $T_n = \frac{S_n}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}$ converge en distribución a una v.a. normal $N(0,1)$.

Indicación: en este problema podría ser útil usar frecuentemente el teorema de la función contínua. Si f es una función contínua y $(X_n) \to_* X$ entonces $(f(X_n)) \to_* f(X)$.