IN790-1: Modelos Estocásticos en Sistemas de Ingeniería
Profesor: J. Correa.
Auxiliares: I. Bortnic y R. Saona.

Auxiliar 7

Jueves 15 de Noviembre

P1. Controlando el máximo, para (sub-)martingalas

Sea $Z_1, \ldots, Z_n$ una sub-martingala y definamos $\overline{Z}_n := \max_{i\in[n]} Z_i$. Muestre que para todo $C > 0$ se tiene que

$$\mathbb{P}\left(\overline{Z}_n \geq C\right) \leq \frac{1}{C}\mathbb{E}(Z_n^+ \mathbb{1}_{\overline{Z}_n > C}) \leq \frac{1}{C}\mathbb{E}(Z_n^+)\,,$$

¿Qué pasa si $Z_1, \ldots, Z_n$ es martingala?, ¿se puede dar una cota para $\overline{|Z|}_n := \max_{i\in[n]} |Z_i|$, cuando tratamos con una martingala?

Propuesto. Concluya que, para $p \geq 1$,

$$Z_1, \ldots, Z_n sub-martingala \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}\left(\overline{Z}_n \geq C\right) \leq \frac{1}{C^p}\mathbb{E}((Z_n^+)^p \mathbb{1}_{\overline{Z}_n > C})$$
$$Z_1, \ldots, Z_n martingala \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}\left(\overline{|Z|}_n \geq C\right) \leq \frac{1}{C^p}\mathbb{E}((|Z|_n)^p \mathbb{1}_{\overline{Z}_n > C})$$

Ahora pensemos en la esperanza del máximo. Pruebe que, para $p > 1$,

$$\mathbb{E}[(\overline{Z}_n^+)^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[(Z_n^+)^p]\,.$$

Aplique estas cotas en el caso que $Z_n := \sum_{i\in[n]} X_i$, donde $(X_i)_{i\in[n]}$ son i.i.d., $\mathbb{E}(X_i) = 0$ y $\mathbb{E}(X_i^2) = \sigma^2 < \infty$, para concluir que, tomando $a > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{\overline{Z}_n}{\sqrt{n}} \geq a\right) \leq \left(\frac{\sigma}{a}\right)^2 \quad , \quad \mathbb{E}\left(\frac{\overline{Z}_n}{\sqrt{n}}\right) \leq 4\sigma^2\,.$$

P2. Controlando el máximo, para variables positivas

Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias positivas, posiblemente correlacionadas. Para todo C, se tiene que

$$\max_{i\in[n]}\{X_i\} := \overline{X}_n \leq C + \sum_{i\in[n]} |X_i - C|_+\,.$$

Tomando esperanza a esta expresión, ¿puede optimizar sobre C y encontrar la mejor cota para este enfoque?, ¿por qué uno se puede reducir al caso $C > 0$?, ¿qué condiciones sobre $X_1, \ldots, X_n$ pediría para tener existencia y unicidad de un C óptimo?

Calcule la cota explícitamente para los siguientes casos.

(a) $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d., con $X \sim U(0, 1)$. ¿Cuán ajustada es la cota?

(b) $X_1 \sim U(0, 1)$ y $X_i = (X_1 + (i-1)/n)_{\equiv 1}$. Note que $X_i \sim U(0, 1)$ para todo i, ¿es ahora la cota ajustada?

(c) $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d., con $X \sim Exp(1)$.*

* Asuma la siguiente identidad. $\sum_{k\in[n]} \frac{1}{k} = \sum_{k\in[n]} \binom{n}{k}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$.

P3. ¿Preguntas de la tarea?
