

1/4

AUXILIAR 7

RAIMUNDO SAONA URMENETA
18.925.104-1

P1) CONTROLANDO EL MÁXIMO, (SUB-) MARTINGALAS

Sea $z_1, \dots, z_n$ una sub-martingala, i.e.: $E(z_{k+1} | F_k) \geq z_k$.
Defina $\bar{z}_n := \max \{z_1, \dots, z_n\}$. Para $c > 0$, muestre que

$$P(\bar{z}_n \geq c) \leq \frac{E(z_n^+ \mathbb{1}_{\bar{z}_n \geq c})}{c} \leq \frac{E(z_n^+)}{c}$$

Definimos el tiempo aleatorio T por

$$T := \inf \{k \in [n] : z_k \geq c\}$$

Luego,

$$\begin{aligned} P(\bar{z}_n \geq c) &= P(\bar{z}_n \geq c, T < \infty) \\ &= \sum_{k \in [n]} P(T = k) \end{aligned}$$

Además, para $k \in [n]$

$$\begin{aligned} P(T = k) &= P(z_k \geq c, T = k) \\ &= E(\mathbb{1}_{z_k \geq c} \mathbb{1}_{T=k}) \\ &\leq E\left(\frac{z_k^+}{c} \mathbb{1}_{T=k}\right) \end{aligned}$$

Notar que z_k^+ es sub-martingala pues

$$\begin{aligned} E(z_{k+1}^+ | F_k) &\geq (E(z_{k+1} | F_k))^+ \\ &\geq z_k^+ \end{aligned}$$

, Jensen

, $z_1, \dots, z_n$ sub-martingala

y también

$$E(|z_k^+|) = E(|z_k|) < \infty$$

, $z_1, \dots, z_n$ sub-martingala

Como T es tiempo aleatorio, i.e.: $\{T=k\} \in F_k$,

$$\begin{aligned} \textcircled{2/4} \quad E(Z_n^+ \mathbb{1}_{T=n} | F_n) &= \mathbb{1}_{T=n} E(Z_n^+ | F_n) \\ &\geq \mathbb{1}_{T=n} (E[Z_n | F_n])^+ \\ &\geq \mathbb{1}_{T=n} Z_n^+ \end{aligned}$$

Así,

$$P(T=n) \leq \frac{1}{c} E(Z_n^+ \mathbb{1}_{T=n}) \leq \frac{E(Z_n^+ \mathbb{1}_{T=n})}{c}$$

Sumando sobre k concluimos.

¿Qué pasa si $Z_1, \dots, Z_n$ es martingala?

En particular es sub-martingala, por lo que aún se cumple. De hecho, la desigualdad es "más ajustada".

¿Se puede decir algo de $|Z|_n$?

Notar que

$(Z_n)_{n \geq 1}$ martingala $\Rightarrow (|Z_n|)_{n \geq 1}$ sub-martingala.

Luego, para todo $c > 0$,

$$P(|Z|_n \geq c) \leq \frac{E(|Z_n| \mathbb{1}_{|Z|_n \geq c})}{c} \leq \frac{E(|Z_n|)}{c}$$

En particular, revisando la demostración

$$(Z_n)_{n \geq 1} \text{ martingala} \Rightarrow P(\bar{Z}_n \geq c) \leq \frac{E((Z_n^+)^p \mathbb{1}_{\bar{Z}_n \geq c})}{c^p}$$

$$(Z_n) \text{ martingala} \Rightarrow P(|Z|_n \geq c) \leq \frac{E(|Z_n|^p \mathbb{1}_{|Z|_n \geq c})}{c^p}$$

3/4

RAIMUNDO SAONA URMEVETA
18.925.704-1

P1)

Pruebe que, para $p > 1$,

$$\mathbb{E}[(\bar{Z}_n^+)^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[(Z_n^+)^p]$$

En efecto, como $\bar{Z}_n^+ \geq 0$,

$$\mathbb{E}[(\bar{Z}_n^+)^p] = \int_0^\infty p (\bar{Z}_n^+)^{p-1} \mathbb{P}(\bar{Z}_n^+ > t) dt$$

$$= \int_0^\infty p (\bar{Z}_n^+)^{p-1} \mathbb{P}(Z_n^+ > t^{1/p}) dt$$

$$\left[\begin{array}{l} u = t^{1/p} \\ du = \frac{1}{p} t^{1/p-1} dt \end{array} \right] = \int_0^\infty p (\bar{Z}_n^+)^{p-1} \mathbb{P}(Z_n^+ > u) u^{p-1} du$$

$$\leq p \int_0^\infty \mathbb{E}[Z_n^+ \mathbb{1}_{\bar{Z}_n^+ \geq u}] u^{p-2} du$$

$$= p \mathbb{E}\left[Z_n^+ \int_0^\infty \mathbb{1}_{\bar{Z}_n^+ \geq u} u^{p-2} du\right] \quad ; \text{ Fubini}$$

$$= \frac{p}{p-1} \mathbb{E}(Z_n^+ \bar{Z}_n^{p-1})$$

$$\leq \frac{p}{p-1} \mathbb{E}[(Z_n^+)^p]^{1/p} \mathbb{E}[(\bar{Z}_n^+)^p]^{p-1/p} \quad ; \text{ Hölder}$$

Luego, si $\mathbb{E}[(\bar{Z}_n^+)^p] < \infty$, concluimos. Si no, consideramos

$$W_n := Z_n \wedge K$$

y tendríamos

$$\mathbb{E}[(\bar{W}_n^+)^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[(W_n^+)^p]$$

Tomando $K \rightarrow \infty$, se concluye la desigualdad.

4/4

Aplique las cotas para el caso que

$$Z_n = \sum_{k \in [n]} X_k, \quad X_1, \dots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \mathbb{E}(X) = 0, \mathbb{E}(X^2) = \sigma^2 < \infty$$

Pues bien,

$$\mathbb{P}(\bar{Z}_n \geq c) \leq \frac{\mathbb{E}(\bar{Z}_n^2)}{c^2} = \frac{\sigma^2 n}{c^2}$$

luego, con $c = \sqrt{n} a$

$$\mathbb{P}(\bar{Z}_n \geq a\sqrt{n}) \leq \left(\frac{\sigma^2}{a^2}\right)$$

También,

$$\mathbb{E}[(\bar{Z}_n)^2] \leq \left(\frac{2}{2-1}\right)^2 \mathbb{E}(\bar{Z}_n^2) = 4\sigma^2 n$$

en particular,

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{\bar{Z}_n}{\sqrt{n}}\right)^2\right] \leq 4\sigma^2$$

1/4

AUXILIAR 7

RAIMUNDO SAONA URMENETA
18.925.104-1

P2) CONTROLANDO EL MÁXIMO DE VARIABLES POSITIVAS

Considere $X_1, \dots, X_n$ v.a.a. positivas.
Muestre que $\forall c \geq 0$,

$$\max_{i \in [n]} \{X_i\} \leq c + \sum_{i \in [n]} |X_i - c|_+$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \max_{i \in [n]} \{X_i\} &= \max_{i \in [n]} \{c + X_i - c\} \\ &\leq c + \max_{i \in [n]} \{(X_i - c)_+\} \\ &\leq c + \sum_{i \in [n]} |X_i - c|_+ \end{aligned}$$

Tome esperanza y minimice en $c \geq 0$.
Por cálculo directo,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\max_{i \in [n]} \{X_i\}) &\leq c + \sum_{i \in [n]} \mathbb{E}(|X_i - c|_+) \\ &= c + \sum_{i \in [n]} \int_0^\infty \mathbb{P}(|X_i - c|_+ > x) dx \\ &= c + \sum_{i \in [n]} \int_c^\infty \mathbb{P}(X_i > y) dy =: \varphi(c). \end{aligned}$$

Para minimizar $\varphi(\cdot)$, notamos que

$$\varphi \text{ continua, } \lim_{c \rightarrow \infty} \varphi(c) = \infty$$

de donde siempre existe el mínimo

(2/4)

Más aún,

$$\varphi(c) = 1 + \sum_{i \in [n]} -IP(X_i > c) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i \in [n]} IP(X_i > c) = 1$$

Para obtener unicidad, una condición suficiente es que

$X_1, \dots, X_n$ sean absolutamente continuas y con soporte conexo.
(F_i sea estrictamente creciente).

~~Calcule para $X_i \sim U(0, 1)$ i.i.d.~~

~~No tenemos que~~

$$\del F_{\min\{X_i\}}(x) = x^n$$

~~y además,~~

$$\del 1 - \min_{i \in [n]} \{X_i\} \sim \max_{i \in [n]} \{X_i\}$$

~~y simétrica.~~

~~Así,~~

$$\del E(\max_{i \in [n]} \{X_i\}) = 1 - E(\min_{i \in [n]} \{X_i\})$$

$$\del = 1 - \int_0^1 IP(\min_{i \in [n]} \{X_i\} > x) dx$$

$$\del = 1 - \int_0^1 1 - x^n dx$$

$$\del = 1 - \left[1 + \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

3/4

RAIMUNDO SAONA URMENETA
18.925.104-1

P2) Calcule para $X_i \sim U(0,1)$ iid
Notar que

$$F_{\max\{X_i\}}(x) = \prod_{i \in [n]} F_i(x) = x^n$$

Así,

$$\begin{aligned} E\left(\max_{i \in [n]} \{X_i\}\right) &= \int_0^1 1 - x^n dx \\ &= 1 - \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\sum_{i \in [n]} P(X_i > c) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad c = 1 - \frac{1}{n}$$

de donde la cota es

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{n} + \sum_{i \in [n]} \int_{1-1/n}^1 P(X_i > y) dy &= 1 - \frac{1}{n} + n \frac{(\frac{1}{n})(\frac{1}{n})}{2} \\ &= 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} = 1 - \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

La cota es asintóticamente ajustada, lo que no es muy difícil de lograr en este caso.

Considere

$$X_i \sim U(0,1) \quad X_i = \left(X_i + \frac{1}{n}\right)_{i=1}^n, \quad \forall i > 1$$

Notar que $X_i \sim U(0,1) \quad \forall i$, pero no son independientes.

La cota es la misma, pero ahora tenemos que

$$P(\exists! k \in [n] \text{ t.q. } X_k \in [1 - \frac{1}{n}, 1]) = 1$$

$$\text{Más aún, } \max_{i \in [n]} \{X_i\} \sim U\left(1 - \frac{1}{n}, 1\right)$$

4/4 En efecto, sean $a < b \in (1 - \frac{1}{n}, 1]$. Luego

$$\begin{aligned} P\left(\max_{i \in [n]} \{X_i\} \in (a, b)\right) &= P\left(X_1 \in \bigcup_{i \in [n]} \left(a + \frac{i}{n}, b + \frac{i}{n}\right) \equiv 1\right) \\ &= n(b-a) = \frac{b-a}{1/n} \end{aligned}$$

Luego

$$E\left(\max_{i \in [n]} \{X_i\}\right) = 1 - \frac{1}{2n}$$

y la cota si es ajustada.

Calcule para $X_i \sim \text{Exp}(1)$ i.i.d.

Notar que

$$P(X_i > c) = e^{-c} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i \in [n]} P(X_i > c) = 1 \\ \Rightarrow n e^{-c} = 1 \\ \Rightarrow c = \ln(n) \end{array} \right\}$$

Luego, la cota es

$$\begin{aligned} \ln(n) + \sum_{i \in [n]} \int_{\ln(n)}^{\infty} P(X_i > y) dy \\ = \ln(n) + n \int_{\ln(n)}^{\infty} e^{-y} dy \\ = \ln(n) + n \left(-e^{-y} \right) \Big|_{\ln(n)}^{\infty} = \ln(n) + n \frac{1}{n} = \ln(n) + 1 \end{aligned}$$

Para calcular la esperanza del máximo,

$$\begin{aligned} E\left(\max_{i \in [n]} \{X_i\}\right) &= \int_0^{\infty} 1 - (F_{\text{Exp}(1)}(x))^n dx \\ &= \int_0^{\infty} 1 - (1 - e^{-x})^n dx \\ &= \int_0^{\infty} 1 - \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{-xk} \right) dx \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{k+1} \int_0^{\infty} e^{-xk} dx \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \approx \ln(n) + \gamma \\ &\approx \ln(n) + 0.5772 \end{aligned}$$