

①

AUXILIAR 6

RAIMUNDO SAONA URMENETA

18.925.104-1

P1) TEOREMA DE TIEMPO OPCIONALDada $(Z_n)_{n \geq 1}$ una martingala y T un t.d.p. si $\exists M < \infty$ t.q.

$$\left. \begin{array}{l} \text{o bien } E(|Z_{n \wedge T}|) \leq M \quad \forall n \geq 1 \\ \text{o bien } P(T \leq M) = 1 \\ \text{o bien } E(|Z_{n \wedge T} - Z_n| | \mathcal{F}_n) \leq M, \quad E(T) < \infty \end{array} \right\} \Rightarrow E(Z_T) = E(Z_1)$$

Como T es t.d.p., $P(T < \infty) = 1$, así

$$(Z_{n \wedge T}) \rightarrow Z_T \quad \text{P-C.S.}$$

Además, como $(Z_{n \wedge T})$ es martingala,

$$E(Z_{n \wedge T}) = E(Z_1)$$

Luego, por convergencia dominada,

$$E(|Z_{n \wedge T}|) \leq M < \infty \Rightarrow E(Z_{n \wedge T}) = E(Z_1) \rightarrow E(Z_T)$$

De igual manera,

$$P(T \leq M) = 1$$

 $\Rightarrow$

$$Z_{n \wedge T} = Z_1$$

 $\Rightarrow$

$$E(Z_T) = E(Z_1)$$

Para el último caso, hay que notar que

$$|Z_{n \wedge T}| = \left| \sum_{i=1}^n Z_{i \wedge T} - Z_{i-1 \wedge T} \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^n |Z_{i \wedge T} - Z_{i-1 \wedge T}|$$

$$= \sum_{i \geq 1} \mathbb{1}_{T \geq i} |Z_{i \wedge T} - Z_{i-1 \wedge T}|$$

$$\text{de donde, } = \sum_{i \geq 1} \mathbb{1}_{T \geq i} |Z_i - Z_{i-1}|$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad \mathbb{E}(|Z_{n+1}|) &\leq \mathbb{E}\left(\sum_{i \geq 1} \mathbb{1}_{T \geq i} |z_i - z_{i-1}| \right) \\
&= \sum_{i \geq 1} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{T \geq i} |z_i - z_{i-1}| \right), \quad \text{T.C.M.} \\
&= \sum_{i \geq 1} \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{T \geq i} |z_i - z_{i-1}| \mid \mathcal{F}_i\right]\right) \\
&= \sum_{i \geq 1} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{T \geq i} \mathbb{E}[|z_i - z_{i-1}| \mid \mathcal{F}_i]\right) \\
&\leq \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(T \geq i) M \\
&= \mathbb{E}(T) M < \infty
\end{aligned}$$

y se concluye por convergencia dominada.

Muestre que

$$\left. \begin{aligned} \mathbb{E}(|Z_T|) &< \infty \\ \mathbb{E}(Z_n \mathbb{1}_{T > n}) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbb{E}(Z_T) = \mathbb{E}(Z_1)$$

Notemos que

$$Z_T = Z_{T \wedge n} + (Z_T - Z_n) \mathbb{1}_{T > n}$$

Luego,

$$\mathbb{E}(Z_T) = \underbrace{\mathbb{E}(Z_{T \wedge n})}_{\equiv \mathbb{E}(Z_1)} + \mathbb{E}(Z_T \mathbb{1}_{T > n}) - \underbrace{\mathbb{E}(Z_n \mathbb{1}_{T > n})}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}$$

Y notar que, por convergencia dominada pues $\mathbb{E}(|Z_T|) < \infty$,

$$\mathbb{E}(Z_T) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{E}(Z_k \mathbb{1}_{T=k}) < \infty,$$

de donde,

$$\mathbb{E}(Z_T \mathbb{1}_{T > n}) = \sum_{k \geq n+1} \mathbb{E}(Z_k \mathbb{1}_{T=k}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

③

RAIMUNDO SAGNA URMENETA
18.925.104-7

P2] ¿Perder antes de ganar?

Considere $(Z_n)_{n \geq 0}$ como el paseo aleatorio en $\mathbb{Z}$ con $p > \frac{1}{2}$ y $A < 0$, $B > 0$. Defina

$$T_x := \inf \{ n \geq 1 : Z_n = x \} \quad , \quad x = A, B$$

$$T := T_A \wedge T_B$$

Defina también

$$\varphi(x) := \left(\frac{1-p}{p} \right)^x$$

Calcule

$$\mathbb{P}(T_B < T_A) \quad (= \mathbb{P}(T = T_B))$$

Primero, notemos que

$$Z_n = \sum_{k \leq n} \xi_k \quad , \quad (\xi_k)_{k \geq 1} \text{ i.i.d. } \xi \sim \mathcal{B}(p) - 1$$

Luego, por ley de los grandes números

$$\left(\frac{Z_n}{n} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}(\xi) = p - (1-p) = 2p - 1 > 0 \quad \text{P.C.S.}$$

de donde,

$$(Z_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty \quad \text{IP-C.S.}$$

y así,

$$\mathbb{P}(T_B < \infty) = 1$$

También, es claro que T es adaptado a la filtración natural de $(Z_n)_{n \geq 0}$. Así, T es t.d.p.

Veamos ahora que $\varphi(Z_n) = \left(\frac{1-p}{p} \right)^{Z_n}$ es martingala. En efecto,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\varphi(Z_{n+1}) | \mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)) &= \left(\frac{1-p}{p} \right)^{Z_n} \mathbb{E} \left(\left(\frac{1-p}{p} \right)^{\xi_{n+1}} | \mathcal{F}_n \right) \\ &\stackrel{II}{=} \varphi(Z_n) \left[\mathbb{E} \left(\left(\frac{1-p}{p} \right)^{\xi} \right) \right] \\ &= \varphi(Z_n) \left[\left(\frac{1-p}{p} \right) p + \left(\frac{p}{1-p} \right) (1-p) \right] \\ &= \varphi(Z_n) \end{aligned}$$

④ Luego, $\varphi(z_T)$ es martingala. Así,

$$\begin{aligned} E(\varphi(z_T)) &= E(\varphi(B) \mathbb{I}_{T=T_B} + \varphi(A) \mathbb{I}_{T=T_A}) \\ &= \varphi(B) P(T_B < T_A) + \varphi(A) P(T_A < T_B) \\ &= \varphi(B) P(T_B < T_A) + \varphi(A) [1 - P(T_B < T_A)] \\ &= E(\varphi(0)) = 1 \end{aligned}$$

de donde

$$P(T_B < T_A) = \frac{1 - \varphi(A)}{\varphi(B) - \varphi(A)}$$

Calcule

$$P(T_A = \infty)$$

Notar que

$$(T_B)_{B \rightarrow \infty} \rightarrow \infty$$

P-C.S.

pues $B \leq T_B$

Además,

$$P(T_A < T_B) = \frac{\varphi(B) - 1}{\varphi(B) - \varphi(A)}$$

Ya que
de donde,

$$p > 1/2 \Rightarrow \frac{1-p}{p} < 1 \Rightarrow (\varphi(x))_{x \rightarrow \infty} \rightarrow 0$$

$$\lim_{B \rightarrow \infty} P(T_A < T_B) = P(T_A < \infty) = \frac{1}{\varphi(A)} = \varphi(-A)$$

$$\therefore P(T_A = \infty) = 1 - \varphi(-A)$$

Calcule

$$E(T_B)$$

Sabemos que T_B es t.d.p.

Chequemos que

$Y_n := Z_n - (2p-1)n$ es martingala

5

Raimundo SAGNA URMENETA
18,925.104-1

En efecto,

$$\begin{aligned} E(Y_{n+1} | F_n) &= E(Z_n + \xi_{n+1} - (2p-1)(n+1) | F_n) \\ &= E(Z_n - (2p-1)n) + E(\xi) - (2p-1); \text{ indep.} \\ &= Z_n - (2p-1)n + p - (1-p) - (2p-1) \\ &= Y_n. \end{aligned}$$

Luego, Y_{T_B} es martingala

$$\begin{aligned} E(Y_{T_B}) &= E(Z_{T_B} - (2p-1)T_B) \\ &= B - (2p-1)E(T_B) \end{aligned}$$

Para calcular $E(Y_{T_B})$, notar que

$$\begin{aligned} E(T_B) &= \sum_{n \geq B} n p^B ((1-p)p)^{\frac{n-B}{2}} \binom{n-1}{n-B} \cdot \frac{(n-B)!}{(\frac{n-B}{2})!^2} \\ &\leq K \sum_{n \geq 1} n^B ((1-p)p)^n = K E(X); \quad X \sim \text{Geo}(p(1-p)) \\ &< \infty \end{aligned}$$

y como

$$|Y_{n+1} - Y_n| = |\xi_{n+1} - (2p-1)| \leq 4 < \infty$$

se tiene que,

$$E(Y_{T_B}) = E(Y_0) = 0$$

$$\therefore E(T_B) = \frac{B}{2p-1}$$

⑥

P3 SIEMPRE PRIMERO

Considere $n, m \sim U(\{10, 11, 12, \dots, 20\})$ y un proceso de conteo de una mesa de votación donde hay n votos por el candidato A y m por el B.

Calcule

$$P(A \text{ siempre tiene más votos que } B)$$

Para resolver este ejercicio se necesita definir conceptos útiles.

VARIABLES INTERCAMBIABLES

$X_1, \dots, X_n$ se dicen intercambiables si

$\forall \pi$ permutación

$$(X_{\pi(i)})_{i \in [n]} \sim (X_i)_{i \in [n]}$$

Ejemplo:

Considere $v_i := i$ -ésimo voto y defina

$$X_i = \begin{cases} 1 & ; v_i = A \\ -1 & ; v_i = B \end{cases}$$

Claramente $(X_i)_{i \in [n]}$ son intercambiables

Defina, para $(X_1, \dots, X_n)$ intercambiables,

$$S_k := \sum_{i \in [k]} X_i$$

$$Z_1 := E[X_1 | S_n] ; Z_k := E[X_1 | S_n, \dots, S_{n+1-k}]$$

Por definición,

Z_n es martingala respecto de $F_n := \sigma(S_n, \dots, S_{n+1-k})$

Además,

$$\begin{aligned} S_{n+1-k} &= E(S_{n+1-k} | S_{n+1-k}) \\ &= E(S_{n+1-k} | S_{n+1-k}, X_{n+2-k}, \dots, X_n) \\ &= \sum_{i \in [n+1-k]} E(X_i | S_{n+1-k}, X_{n+2-k}, \dots, X_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{intercambiables}) &= (n+1-k) E(X_1 | S_{n+1-k}, X_{n+2-k}, \dots, X_n) \\ &= (n+1-k) E(X_1 | S_{n+1-k}, S_{n+2-k}, \dots, S_n) \\ &= (n+1-k) Z_k \end{aligned}$$

7

Así,

$(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ intercambiables $\Rightarrow$

$$Z_k = \mathbb{E}(X_1 | S_n, \dots, S_{n+1-k}) \\ = \frac{S_{n+1-k}}{n+1-k}$$

RAIMUNDO SAGNA URMENETA
18.925.104-1

Volviendo al problema, definimos

$$N := \min \{ j \in [n+m] : Z_j = 0 \} \wedge \{n+m\}$$

Claramente

N es t.d.p. respecto $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{n+m}$.

Y como N es acotado,

$$\mathbb{E}(Z_N) = \mathbb{E}(Z_1) = \frac{\mathbb{E}(S_{n+m})}{n+m} = \frac{n-m}{n+m}.$$

Notar que

$$Z_N = \begin{cases} 0 & ; \text{perdimos} \\ Z_{n+m} = X_1 & ; \text{perdimos en } n+m \text{ o ganamos} \end{cases}$$

Ahora bien,

$$n \leq m \Leftrightarrow \text{Siempre perdemos}$$

Asumamos $n > m$, luego

$$Z_N = \begin{cases} 0 & ; \text{perdemos} \\ X_1 = 1 & ; \text{ganamos} \end{cases}$$

pues

$$N = n+m \Rightarrow \text{ganamos} \Rightarrow X_1 = 1.$$

Luego,

$$\mathbb{E}(Z_N) = P(\text{ganar}) = \frac{n-m}{n+m}.$$

Para terminar, hay que calcular

$$\mathbb{E} \left[\frac{n-m}{n+m} \mathbb{1}_{n>m} \right]$$