

①

CONTROL 1

RAIMUNDO SAONA URMENETA
18.925.104-1

P1) CONVERGENCIAS

Muestre que

$$(X_n) \xrightarrow{cm} X \Rightarrow (X_n) \xrightarrow{IP} X$$

Directo, pues

$$P(|X_n - X| > \varepsilon) = IP((X_n - X)^2 > \varepsilon^2) \leq \frac{E[(X_n - X)^2]}{\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Muestre que

$$(X_n) \xrightarrow{P} X \not\Rightarrow (X_n) \xrightarrow{cm} X$$

considerando $U \sim U(0,1)$ y $X_n := \sqrt{n} \mathbb{I}_{\{U \in (0, 1/n)\}}$.

Notemos que

$$P(|X_n - 0| > \varepsilon) = IP(U \in (0, 1/n)) \quad ; \quad \sqrt{n} > \varepsilon$$

$$= \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\therefore (X_n) \xrightarrow{IP} 0$$

Ahora bien,

$$E[(X_n - 0)^2] = E(X_n^2) = n \cdot \frac{1}{n} \equiv 1 \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\therefore (X_n) \not\xrightarrow{cm} 0$$

Determine si

$$(X_n) \xrightarrow{cm} X \stackrel{?}{\Rightarrow} (X_n) \xrightarrow{IP} X \quad \text{IP-C.S.}$$

La implicancia no se cumple.

Consideremos

$$A_{1,1} := [0, 1/2] \quad ; \quad A_{1,2} := [1/2, 1]$$

y para $i_n \rightarrow i_n \in \{1, 2\}$

$$A_{i_n, i_n, 1} := [\inf(A_{i_n, i_n}), \text{punto medio}(A_{i_n, i_n})]$$

$$A_{i_n, i_n, 2} := [\text{punto medio}(A_{i_n, i_n}), \sup(A_{i_n, i_n})]$$

en otras palabras, los intervalos diádicos.

②

Consideremos

$$(B_n)_{n \in \mathbb{N}} = \{ A_{i_1, \dots, i_n} : n \in \mathbb{N}, i_1, \dots, i_n \in \{1, 2\} \}$$

y definimos

$$X_n := \mathbb{1}_{U \in B_n} \quad ; \quad U \sim U(0, 1)$$

Luego,

$$\mathbb{E}[(X_n - 0)^2] = \mathbb{E}(X_n^2) = \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{P}(U \in B_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\therefore (X_n) \xrightarrow{cm} 0$$

Ahora bien,

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge

$$\therefore (X_n) \not\rightarrow 0$$

P-C.S.

W-C.S.

Determine

$$(X_n) \xrightarrow{cm} X \stackrel{?}{\Rightarrow} (X_n) \xrightarrow{F} X$$

Si, pues

$$(X_n) \xrightarrow{cm} X \Rightarrow \begin{matrix} (X_n) \xrightarrow{P} X \\ (X_n) \xrightarrow{F} X \end{matrix}$$

; primera pregunta
; Auxiliar 2

①

CONTROL 1RAIMUNDO SAONA URMENETA
18.925.104-1P2 | TEOREMA DEL LÍMITE CENTRALConsidere $U \sim U(-1, 1)$ y defina

$$X_n = U$$

$$Y_n = (-1)^n U$$

Muestre que

$$(X_n) \xrightarrow{F} U$$

$$(Y_n) \xrightarrow{F} U$$

pero $(Z_n := X_n + Y_n) \not\xrightarrow{F}$

En efecto, basta notar que

$$F_{X_n} = F_{Y_n} = F_U$$

Por otro lado,

$$P(Z_n \leq 0) = \begin{cases} 0 & ; n \equiv_2 0 \\ 1/2 & ; n \equiv_2 1 \end{cases}$$

de donde no converge.

Construya un ejemplo donde $(X_n) \xrightarrow{F} X$, $(Y_n) \xrightarrow{F} Y$
pero $Z_n := X_n + Y_n$ no converge en distr. bución.

Consideremos

$$U_1, U_2 \sim U(0, 1)$$

independientes

y definimos

$$X_n = U_1$$

$$Y_n = \begin{cases} \frac{1}{U_1} & ; n \equiv_2 0 \\ \frac{1}{U_2} & ; n \equiv_2 1 \end{cases}$$

Notamos que

$$F_{X_n} = F_{U_1}$$

$$F_{Y_n} = F_{1/U_i}$$

Pero,

$$P(Z_n \leq 1) = \begin{cases} 1 & ; n \equiv_2 0 \\ 1/2 & ; n \equiv_2 1 \end{cases}$$

de donde no converge

② (Bonus) Muestre que

$$\left. \begin{array}{l} (X_n) \xrightarrow{F} X \\ (Y_n) \xrightarrow{F} c \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} (X_n + Y_n) \xrightarrow{F} X + c \\ (X_n Y_n) \xrightarrow{F} cX \end{array}$$

En efecto, sea $\varepsilon > 0$. Notamos que

$$P(X_n + Y_n \leq t) = P(X_n + Y_n \leq t, Y_n \in (c - \varepsilon, c]) + P\left(\begin{array}{l} Y_n \notin (c - \varepsilon, c] \\ X_n + Y_n \leq t \end{array}\right)$$

además, $(Y_n) \xrightarrow{F} c \Rightarrow (P(Y_n \notin (c - \varepsilon, c])) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

por otro lado

$$P(X_n \leq t - c + \varepsilon, Y_n \in (c - \varepsilon, c]) \leq P(X_n + Y_n \leq t, Y_n \in (c - \varepsilon, c]) \leq P(X_n \leq t - c + \varepsilon)$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(X \leq t - c + \varepsilon)$$

Luego, como $F_X(\cdot)$ es continua por la derecha, concluimos

Para la segunda convergencia, de forma similar, sea $\lambda > 0$. Notamos que

$$P(X_n Y_n \leq t) = P(X_n Y_n \leq t, Y_n \in ((1 - \lambda)c, c]) + P(X_n Y_n \leq t, Y_n \notin ((1 - \lambda)c, c])$$

además, $(Y_n) \xrightarrow{F} c \Rightarrow (P(Y_n \notin ((1 - \lambda)c, c])) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

así,

$$P(X_n \leq \frac{t}{1 - \lambda}, Y_n \in ((1 - \lambda)c, c]) \leq P(X_n Y_n \leq t, Y_n \in ((1 - \lambda)c, c]) \leq P(X_n \leq \frac{t}{(1 - \lambda)})$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(X \leq \frac{t}{1 - \lambda}) \quad P(X \leq \frac{t}{(1 - \lambda)})$$

De nuevo, por continuidad por la derecha de $F_X(\cdot)$ podemos concluir.

③

CONTROL 1

RAIMUNDO SAGNA URMENETA
18.925.104-1

P2] TEOREMA DEL LÍMITE CENTRAL

Considere $(X_n)_{n \geq 1}$ iid. con $IE(X_n) = \mu = 0$ conocida y $IE(X_n^2) = \sigma^2$ desconocida. Sea $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$. Pruebe que

$$\left(Z_n := \frac{S_n}{\sigma \sqrt{n}} \right) \xrightarrow{F} N(0,1)$$

Directo del teorema del límite central.

Consulta:

¿Qué se espera como respuesta?

Considere $R_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i)^2$. Muestre que $(R_n) \xrightarrow{F} \sigma^2$

En efecto, por la ley de los grandes números

$$(R_n) \rightarrow IE(X_i^2) = \sigma^2 \quad \text{P.C.S.}$$

y luego en distribución.

$$\text{Concluya que } \left(T_n := \frac{S_n}{\sqrt{R_n} \sqrt{n}} \right) \xrightarrow{F} N(0,1)$$

En efecto,

$$T_n = \frac{\sigma}{\sqrt{R_n}} \cdot \frac{S_n}{\sigma \sqrt{n}}$$

donde

$$\left(\frac{\sigma}{\sqrt{R_n}} \right) \xrightarrow{F} 1 \quad \left(\frac{S_n}{\sigma \sqrt{n}} \right) \xrightarrow{F} N(0,1)$$

Concluimos por (iii).

①

CONTROL 1RAIMUNDO SAONA URMENETA
18.925.104-1P3 TRIÁNGULOS EN GRAFOS

Sea

$$N_{\Delta} := |\{ \{v_1, v_2, v_3\} \subseteq V : \binom{\{v_1, v_2, v_3\}}{2} \subseteq E \}|$$

Pruebe que

$$\mathbb{E}(N_{\Delta}) = \binom{n}{3} p^3$$

En efecto,

$$N_{\Delta} = \sum_{i=1}^{\binom{n}{3}} T_i$$

donde

$$T_i := \mathbb{I}_{\{\Delta_i \subseteq G\}}$$

; con Δ_i el i -ésimo triángulo en G , bajo alguna enumeraciónEs directo que $\mathbb{E}(T_i) = p^3$. Luego,

$$\mathbb{E}(N_{\Delta}) = \binom{n}{3} p^3$$

Concluya que

 $\alpha > 1$ $\Rightarrow$

$$P(N_{\Delta} \geq 1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

En efecto,

$$\mathbb{E}(N_{\Delta}) = \binom{n}{3} p^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} n^{-3\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Luego, como

$$P(N_{\Delta} \geq 1) \leq \mathbb{E}(N_{\Delta})$$

concluimos.

Pruebe que

$$P(N_{\Delta} = 0) \leq \frac{\text{Var}(N_{\Delta})}{(\mathbb{E}[N_{\Delta}])^2}$$

En efecto, por la desigualdad de Markov,

$$\begin{aligned} P(N_{\Delta} = 0) &= P(N_{\Delta} \leq 0) = P(N_{\Delta} - \mathbb{E}[N_{\Delta}] \leq -\mathbb{E}[N_{\Delta}]) \\ &\leq P((N_{\Delta} - \mathbb{E}[N_{\Delta}])^2 \geq (\mathbb{E}[N_{\Delta}])^2) \leq P((N_{\Delta} - \mathbb{E}[N_{\Delta}])^2 \geq (\mathbb{E}[N_{\Delta}])^2) \leq \frac{\text{Var}(N_{\Delta})}{(\mathbb{E}[N_{\Delta}])^2} \end{aligned}$$

② Calcule $\text{VAR}(N_\Delta)$.

En efecto, para cada $i \in \left[\binom{n}{3} \right]$, podemos definir

$\left(T_j^{(i)} \right)_{j=1, \dots, \binom{n-3}{3}}$ triángulos sin lados en común

$\left(T_{k,j}^{(i)} \right)_{\substack{k=1,2,3 \\ j=1, \dots, n-3}}$ triángulos con 1 lado en común

T_i es el único triángulo con 2 o 3 lados en común.
Luego,

$$\begin{aligned} \text{VAR}(N_\Delta) &= \text{VAR}\left(\sum_{i=1}^{\binom{n}{3}} T_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\binom{n}{3}} \left\{ \underbrace{\sum_{j=1}^{\binom{n-3}{3}} \text{Cov}(T_i, T_j^{(i)})}_{0 \text{ por independencia}} + \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^{n-3} \left(\text{Cov}(T_i, T_{k,j}^{(i)}) + \text{Cov}(T_i, T_i) \right) \right\} \\ &= \binom{n}{3} \left\{ 0 + 3(n-3) \text{Cov}(T_1, T_{1,1}^{(1)}) + p^3(1-p^3) \right\} \end{aligned}$$

pues $\text{Cov}(T_i, T_{k,j}^{(i)}) \equiv \text{Cov}(T_1, T_{1,1}^{(1)})$; por simetría

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E}(T_1 T_{1,1}^{(1)}) - \mathbb{E}(T_1) \mathbb{E}(T_{1,1}^{(1)}) \\ &= p^5 - p^6 \end{aligned}$$

también

$$\text{Cov}(T_i, T_i) = \text{VAR}(\text{Ber}(p^3)) = p^3(1-p^3)$$

Así,

$$\text{VAR}(N_\Delta) = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \left\{ 3(n-3) p^5(1-p) + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} p^3(1-p^3) \right\}$$

Muestre que

$$\alpha < 1 \Rightarrow \mathbb{P}(N_\Delta = 0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Por lo anterior, basta que $\frac{\text{VAR}(N_\Delta)}{(\mathbb{E}[N_\Delta])^2} \rightarrow 0$

y sabemos que

$$\frac{\text{VAR}(N_\Delta)}{(\mathbb{E}[N_\Delta])^2} = \frac{\binom{n}{3} \left\{ 3(n-3) p^5(1-p) + p^3(1-p^3) \right\}}{\left(\binom{n}{3} p^3 \right)^2} = \frac{3(n-3) p^2(1-p) + (1-p^3)}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6} p^3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$