IN78O-1 Microeconomía Avanzada (segunda parte)

Profesor: Matteo Triossi Verondini
Auxiliar: María Haydée Fonseca Mairena

Tarea N°6

Primavera 2018

Fecha de entrega: 27 de diciembre.

Ejercicio teórico

Sea $G = \{N, (A_i), (\succsim_i)\}$ un juego estratégico y para cada $i \in N$ denote u_i la función de pagos que representa las preferencias $\succsim_i$. Defina el **pago minmax** del jugador i en G, el cual denoteremos por $\underline{v}_i$, como el menor pago que los otros jugadores pueden forzar al jugador i.

$$\underline{v}_i = \min_{a_{-i} \in A_{-i}} \max_{a_i \in A_i} u_i(a_{-i}, a_i). \tag{1}$$

Demuestre formalmente los siguiente dos teoremas:

1. **Clásico Folk Theorem.** Para cada vector de pagos factible v con $v_i > \underline{v}_i$ para todos los jugadores, existe un $\underline{\delta} < 1$ tal que para todo $\delta \in (\underline{\delta}, 1)$ existe un equilibrio de Nash del juego $G(\delta)$ con pagos v.

   Respuesta:
   Pág. 153-154 de Fudenberg, D. y Tirole, J. Game Theory. MIT Press, 1991.

2. **Folk Theorem by Friedman, 1971.** Sea α^* un equilibrio estático con pagos e. Luego, para todo $v \in V$ con $v_i > e_i$ para todos los jugadores i, existe un $\underline{\delta}$ tal que para todo $\delta > \underline{\delta}$ existe un equilibrio perfecto en subjuegos de $G(\delta)$ con pagos v.

   Respuesta:
   Pág. 154-155 de Fudenberg, D. y Tirole, J. Game Theory. MIT Press, 1991.

Ejercicio práctico

Considere un juego de duopolio a la Bertrand repetido un número infinito de veces. La demanda de mercado esta dada por $Q = 1 - P$, y cada firma tiene costos marginales constantes e iguales a 0. Como es de esperar, los consumidores comprarán los productos de aquella firma que ofrezca los precios más bajos y si hay más de una firma que ofrece el mismo precio bajo asuma que la demanda se reparte en partes iguales.

1. ¿Cuál es el valor mínimo de δ para el cual el precio de monopolio puede sostenerse como un equilibrio perfecto en subjuego? Para contestar esta pregunta se recomienda utilizar una "trigger strategyçon la cual escoger el precio de monopolio si todos los jugadores en los períodos previos también lo han hecho o escoger un precio igual a cero si alguien jugó una estrategia diferente a la de monopolio.

   Respuesta:
   El precio de monopolio es $p^m = 1/2$. El inciso nos indica considera la siguiente "trigger strategy"
   - Iniciar jugando con p^m y jugar p^m si todos han jugado p^m en todos los periodos previos.

- Jugar 0 si algien ha jugado alguna otra estrategia diferente a p^m al menos una vez.

Por el principio de única desviación es suficiente revisar si hay incentivos para desviarse una única vez para demostrar que la estrategia planteada sea un equilibrio perfecto en subjuegos.

Primero analicemos cuando nadie se ha desviado de p^m antes. Si una firma juega p^m, como sugiere la estrategia, entonces todos van a jugar p^m cada período en el futuro y por tanto el beneficio de cada firma por periodo va a estar dado por

$$\frac{p^m(1-p^m)}{2} = \frac{1}{8}$$

y la suma presente descontada de la secuencias de beneficios es

$$\frac{1}{8} + \delta \cdot \frac{1}{8} + \delta^2 \cdot \frac{1}{8} + \delta^3 \cdot \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{1-\delta}\frac{1}{8}$$

En cambio de si la firma se desvía, lo mejor que podría hacer hoy es escoger un precio un poco menor de p^m, así podría robar toda la demanda y obtener así el beneficio de monopolio completo

$$p^m(1-p^m) = \frac{1}{4}$$

Si la firma desvía, todos van a jugar 0 desde el siguiente período y para siempre, obteniendo en dichos períodos beneficios de cero. Por lo tanto el valor presente de la suma descontada de la secuencia de pagos sería

$$\frac{1}{4} + \delta \cdot 0 + \delta^2 \cdot 0 + \delta^3 \cdot 0 + \cdots = \frac{1}{4}$$

Por tanto, la firma no va a tener incentivos para desviarse si y solo si

$$\frac{1}{1-\delta}\frac{1}{8} \geq \frac{1}{4}$$

ó

$$\delta \geq \frac{1}{2}$$

Ahora, debemos de verificar los incentivos cuando nadie ha desviado antes de p^m. En este caso, las acciones de la firma hoy no afectará los pagos futuros porque todos van a jugar cero en el futuro sin importar lo que pase hoy. Por tanto es suficiente mostrar que si la firma puede incrementar su pago presente por el desvío. Si la firma juego $p = 0$, tal y como sugiere la estrategia, obtendrá un pago de cero. Si se desvía jugando $p > 0$, obtendría también un beneficio instantáneo de cero porque todos los consumidores van a preferir las otras firmas (que tienen un precio igual a cero). Por tanto no hay beneficios del desvío.

Se concluye que la estrategia tipo "trigger strategyçonstituye un equilibrio de Nash perfecto en subjuego si $\delta \geq 1/2$

2. ¿Cuál es el valor mínimo de δ para el cual el precio de monopolio puede sostenerse como un equilibrio perfecto en subjuego cuando hay n firmas?

Respuesta:

Nuevamente consideramos la estrategia tipo "trigger strategy"del inciso anterior.

Primero revisamos los incentivos de desviarse cuando nadie se ha desviado de p^m antes. Si la firma juega p^m, a como lo sugiere la estrategia, todos van a jugar también p^m cada periodo en el futuro y por tanto los beneficios de cada firma en cada periodo es

$$\frac{p^m(1-p^m)}{n} = \frac{1}{4n}$$

y la suma presente descontada de la secuencias de beneficios es

$$\frac{1}{4n} + \delta \cdot \frac{1}{4n} + \delta^2 \cdot \frac{1}{4n} + \delta^3 \cdot \frac{1}{4n} + \cdots = \frac{1}{1-\delta}\frac{1}{4n}$$

En cambio de si la firma se desvía, lo mejor que podría hacer hoy es escoger un precio un poco menor de p^m, así podría robar toda la demanda y obtener así el beneficio de monopolio completo

$$p^m(1-p^m) = \frac{1}{4}$$

Si la firma desvía, todos van a jugar 0 desde el siguiente período y para siempre, obteniendo en dichos períodos beneficios de cero. Por lo tanto el valor presente de la suma descontada de la secuencia de pagos sería

$$\frac{1}{4} + \delta \cdot 0 + \delta^2 \cdot 0 + \delta^3 \cdot 0 + \cdots = \frac{1}{4}$$

Por tanto, la firma no va a tener incentivos para desviarse si y solo si

$$\frac{1}{1-\delta}\frac{1}{4n} \geq \frac{1}{4}$$

ó

$$\delta \geq \frac{n-1}{n}$$

Ahora, debemos de verificar los incentivos cuando nadie ha desviado antes de p^m. En este caso, las acciones de la firma hoy no afectará los pagos futuros porque todos van a jugar cero en el futuro sin importar lo que pase hoy. Por tanto es suficiente mostrar que si la firma puede incrementar su pago presente por el desvío. Si la firma juego $p = 0$, tal y como sugiere la estrategia, obtendrá un pago de cero. Si se desvía jugando $p > 0$, obtendría también un beneficio instantáneo de cero porque todos los consumidores van a preferir las otras firmas (que tienen un precio igual a cero). Por tanto no hay beneficios del desvío.

Se concluye que la estrategia tipo "trigger strategyçonstituye un equilibrio de Nash perfecto en subjuego si $\delta \geq \frac{n-1}{n}$

3. Explique qué relación tiene esto con el Teorema Folk visto en clases.

Respuesta:

Este ejercicio es un ejemplo del cumplimiento del teorema Folk, el cual nos dice que en cualquier juego repetido infinitamente, suponiendo que existe un perfil de equilibrio de Nash con un vector de pagos $w_i = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$, si denotamos v, cualquier vector factible de pagos promedio por periodo tal que $v_i > w_i$ para cada jugador i. El vector v puede ser soportado por un una estrategia de equilibrio de Nash perfecta en subjuegos si δ es suficientemente cercano a 1.