IN78O-1 Microeconomía Avanzada (segunda parte)

Profesor: Matteo Triossi Verondini
Auxiliar: María Haydée Fonseca Mairena

Examen

Primavera 2018

I. Ejercicio Teórico

Considere una economía de intercambio puro $\mathcal{E}$ con n consumidores y l mercancías. El espacio de las mercancías es $\mathbb{R}^l$. Cada consumidor i es caracterizado por un conjunto de consumo $\mathbb{R}^l_+$, una relación de preferencias $\succeq_i$ en $\mathbb{R}^l_+$ y una dotación inical $\omega_i = (\omega_{ij})_{j=1}^l \in \mathbb{R}^l_+$. Asuma los siguientes supuestos:

A.1 La asignación inicial, ω_i es estrictamente positiva, es decir, $\omega_i \gg 0$.

A.2 La relación de preferencias, $\succeq_i$, es contínua estrictamente monónota y convexa. Lo cual implica que es representada por una función de utilidad continua, cuasicóncava y estrictamente creciente $U_i : \mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}_+$, con $U_i(0) = 0$.

Luego, una economía está definida por $\mathcal{E} \equiv (\mathbb{R}^l_+, (U_i, \omega_i)_{i=1}^n)$.

1. Denote por p el sistema de precios y x como una canasta de consumo tal que $x_i \in \mathbb{R}^l_+$ para cada agente $i = 1, \dots, n$. Defina formalmente el equilibrio Walrasiano para la economía $\mathcal{E}$.

Respuesta:
La asignación x es factible en la economía $\mathcal{E}$ si $\sum_{i=1}^n x_i \leq \sum_{i=1}^n \omega_i$. Por otra parte, un sistema de precios es un elemento de $\Delta = \{p \in \mathbb{R}^l_+ : \sum_{h=1}^l p_h = 1\}$. Luego, un equilibrio Walrasiano para la economía $\mathcal{E}$ es un par $(p, x) \in \Delta \times \mathbb{R}^{ln}_+$, donde p es un sistema de precios y x es una asignación factible para que para cada agente i la canasta x_i maximiza la utilidad U_i en la restricción presupuestaria $B_i(p) = \{y \in \mathcal{R}^l_+ : p \cdot y \leq p \cdot \omega_i\}$.

2. Una asignación x es bloqueada por una coalición S si existe y_i, $i \in S$, tal que $\sum_{i \in S} y_i \leq \sum_{i \in S} \omega_i$ y $U_i(y_i) > U_i(x_i)$ para cada miembro i de la coalición S. El núcleo de la economía es el conjunto de asignaciones factibles (es decir, $\sum_{i=1}^n x_i \leq \sum_{i=1}^n \omega_i$) las cuales no son bloqueadas por ninguna coalición de agentes. Responda si la siguiente afirmación es verdadera o falsa y argumente:

   Bajo las hipótesis (A.1) y (A.2) la economía $\mathcal{E}$ tiene un equilibrio Walrasiano. Más aún, la asignación de equilibrio está en el núcleo de la economía.

Respuesta:
Verdadero

3. Defina *veto* en el sentido de Aubin como sigue: una asignación x es bloqueada en el sentido de Aubin por la coalición S via la asignación y si existe $\alpha_i \in (0, 1]$, para cada $i \in S$ tal que (i)$\sum_{i \in S} \alpha_i y_i \leq \sum_{i \in S} \alpha_i \omega_i$, y (ii) $U_i(y_i) > U_i(x_i)$, para cada $i \in S$. El núcleo de Aubin de la economía $\mathcal{E}$ es el conjunto de asignaciones factibles que no pueden ser bloqueadas en el sentido de Aubin.

   Ahora armaremos un juego asociado a esta economía. Asuma que hay dos jugadores. Tales que el conjunto de estrategia del jugador 1 es el conjunto de asignaciones factibles que asigna consumo diferente de cero a cada agente. Y el conjunto de estrategias del jugador 2 es el conjunto de asignaciones factibles en el sentido de Aubin con una participación mayor o igual a α con $0 < \alpha < 1$ para cada miembro de la sociedad.

   Se le pide lo siguiente:

(a) Defina formalmente el conjunto de estrategias de cada jugador.

Respuesta:

$$S_1 = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^{ln} \text{ tal que } x_i \neq 0 \text{ y } \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} \omega_i \right\}.$$

$$S_2 = \left\{ (a, y) \in [\alpha, 1]^n \times \mathbb{R}_+^{ln} \text{ tal que } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \omega_i \right\}.$$

(b) Demuestre que los conjuntos de estrategias son diferentes de vacío.

Respuesta:
$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in S_1$. Por otra parte, $(\mathbf{1}, \omega) \in S_2$, donde $\mathbf{1}$ es un vector en $[\alpha, 1]^n$ cuyas coordinadas son constantes e iguales a 1.

4. Sea S el producto $S_1 \times S_2$. Un perfil de estrategias es cualquier $s = (x, a, y) \in S$, donde $x \in S_1$ y $(a, y) \in S_2$. Las funciones de pago para cada jugador son definidas como sigue:

$$\Pi_1(x, a, y) = \min_i \{U_i(x_i) - U_i(y_i)\},$$

$$\Pi_2(x, a, y) = \min_i \{a_i(U_i(x_i) - U_i(y_i))\}.$$

El juego está entonces definido como $G = \{S_1, S_2, \Pi_1, \Pi_2\}$. Demuestre lo siguiente:

(a) Si x no es Pareto-óptimo, el jugador 1 puede mejorar su pago.

Respuesta:
Dado un perfil de estrategia $s = (x, a, y) \in S$, si $x \in S_1$ no es una asignación eficiente, entonces existe una asignación factible z tal que $U_i(z_i) > U_i(x_i)$ para cada $i = 1, \dots, n$; y por tanto $U_i(z_i) - U_i(y_i) > U_i(x_i) - U_i(y_i)$ para cada $i = 1, \dots, n$ y para todo $(a, y) \in S_2$. En otras palabras, si x no es Pareto-óptimo, existe una asignación $z \in S_1$ tal que $\Pi_1(z, a, y) > \Pi_1(x, a, y)$ para cada $(a, y) \in S_2$.

(b) Si el jugador 2 selecciona (a, x), donde x es una asignación factible y eficiente, entonces la mejor respuesta del jugador 1 también es una asignación x Pareto-óptima.

Respuesta:
Me piden demostrar que $\Pi_1(x, a, x) \geq \Pi_1(z, a, x)$, para todo $z \in S_1$. Para ver esto note que $\Pi_1(x, a, x) = 0$ y si existe $z \in S_1$ tal que $\Pi_1(z, a, x) > \Pi_1(x, a, x) = 0$, entonces $U_i(z_i) > U_i(x_i)$ para cada individuo en la sociedad, lo cual es una contradicción con la eficiencia de x.

5. Defina equilibrio de Nash del juego G en esta economía. Luego demuestre que el conjunto de equilibrio de Nash en estrategias puras del juego G es distinto de vacío.

Respuesta:
Un equilibrio de Nash del juego G es un perfil de estrategias $s^* = (x^*, a^*, y^*) \in S$ tal que

$$\Pi_1(s^*) \geq \Pi_1(x, a^*, y^*); \text{ para cada } x \in S_1 \text{ y}$$

$$\Pi_2(s^*) \geq \Pi_2(x^*, a, y), \text{para cada } (a, y) \in S_2.$$

Que el conjunto de equilibrio de Nash en estrategias puras del juego G sea distinto de vacío es una consecuencia del la existencia de Equilibrio Walrasiano de la economía $\mathcal{E}$. De hecho, si x es una asignación Walrasiana, entonces $(x, \mathbf{1}, x)$ es un equilibrio de Nash de la sociedad en el juego G. Para ver esto, note que $\Pi_1(x, 1, x) \geq \Pi_1(z, 1, x)$, para todo $z \in S_1$, desde que x es Pareto-óptimo. Por otra parte, si existe $(a, y) \in S_2$ tal que $\Pi_2(x, a, y) \geq \Pi_2(x, 1, x)$, implica que x puede ser bloqueado en el sentido de Aubin, lo cual contradice con el hecho de que x es un resultados del equilibrio Walrasiano.

Referencia: Estas preguntas fueron elaboradas en base al paper: C. Hervés-Beloso, E. Moreno-García, Walrasian analysis via two-player games, Games Econ. Behav. (2008).

II. Ejercicio Práctico

Considere el siguiente juego de Cournot. La cantidad agregada es $Q = q_1 + q_2$, el precio de equilibrio es $P(Q) = 1 - Q$, suponga que $Q < a$. CAda empresa tiene un coste marginal c y no tiene costos fijos. Las empresas escogen sus cantidades simultáneamente.
Observación: En la pauta $a = 1$.

1. Encuentre el único equilibrio de Nash del juego estático. Denote dicha cantidad por q_c.

Respuesta:

$$q_1 = q_2 = \frac{a - c}{3}$$

2. Considere el juego repetido infinitamente basado en el juego de Cournot descrito, cuando las dos empresas tienen el mismo factor de descuento δ.

   Considere la siguiente estrategia.

   > Producir la mitad de la cantidad de monopolio $q_m/2$ en el primer periodo. En el t-ésimo periodo, producir la $q_m/2$ si ambas empreas han producido $q_m/2$ en cada uno de los $t-1$ periodos anteriores, en caso contrario producir la cantidad de Cournot q_c.

   Encuentre los valores de δ para los cuales cuando las empresas juegan la estrategia descrita llegamos a un equilibrio de Nash perfecto en sujuegos del juego repetido infinitamente.

Respuesta:

La respuesta es $\delta \geq 9/17$. Tendrá puntaje completo si demuestra cada paso necesario para obtener el resultado.

3. El objetivo de este item es determinar para un valor dado de δ, la cantidad más rentable que las empresa pueden producir si ambas siguen una estrategia del disparador que transforman para siempre en la cantidad de Cournot después de cualquier desviación.

   Específicamente, calcule el valor menor de q^* para el que las estrategias descritas a continuación son un equilibro de Nash perfecto en subjuegos.

   > Producir q^* en el primer periodo. En el t-ésimo periodo, producir q^* si ambas empresas han producido q^* en cada uno de los $t-1$ periodos anteriores; en caso contrario, producir la cantidad de Cournot, q_c.

Respuesta:

$$q^* = \frac{9 - 5\delta}{3(9-\delta)}(a-c)$$

4. ¿Qué relación tiene con δ el valor de q^* encontrado en el inciso anterior? Además complete lo siguiente:

   (a) q^* tiende a $q_m/2$ cuando δ tiende a:

   Respuesta:
   9/17.

   (b) q^* tiende a q_c cuando δ tiende a:

   Respuesta:
   0.

5. Considere la siguiente estrategia

   Producir la mitad de la cantidad de monopolio, $q_m/2$, en el primer periodo. En el t-ésimo periodo, producir $q_m/2$ si ambas empresas produjeron $q_m/2$ en el periodo $t-1$, $q_m/2$ si ambas empresas produjeron x en el periodo $t-1$, y x en cualquier otro caso.

   ¿Para qué valores de δ dicha estrategia se sostiene como un equilibrio perfecto en subjuegos?

   Respuesta:
   La respuesta es $\delta = 1/2$. Tendrá puntaje completo si demuestra cada paso necesario para obtener el resultado.

Referencia: Estas preguntas fueron elaboradas basados en el capítulo de Juegos Repetidos del libro de Robert Gibbons: *Un primer curso de teoría de juegos*, 1992.