IN78O-1 Microeconomía Avanzada (segunda parte)

Profesor: Matteo Triossi Verondini
Auxiliar: María Haydée Fonseca Mairena

Auxiliar N°8

Primavera 2018

Temas a abordar

- Juegos repetidos infinitas veces.
- Nash Folk Theorems.

Introducción

Sea $G = \{N, (A_i), (\succsim_i)\}$ un juego estratégico y para cada $i \in N$ denote u_i la función de pagos que representa las preferencias $\succsim_i$. Defina el **pago minmax** del jugador i en G, el cual denoteremos por $\underline{v}_i$, como el menor pago que los otros jugadores pueden forzar al jugador i.

$$\underline{v}_i = \min_{a_{-i}\in A_{-i}} \max_{a_i\in A_i} u_i(a_{-i}, a_i). \tag{1}$$

Clásico Folk Theorem. Para cada vector de pagos factible v con $v_i > \underline{v}_i$ para todos los jugadores, existe un $\underline{\delta} < 1$ tal que para todo $\delta \in (\underline{\delta}, 1)$ existe un equilibrio de Nash del juego $G(\delta)$ con pagos v.

Folk Theorem by Friedman, 1971. Sea α^* un equilibrio estático con pagos e. Luego, para todo $v \in V$ con $v_i > e_i$ para todos los jugadores i, existe un $\underline{\delta}$ tal que para todo $\delta > \underline{\delta}$ existe un equilibrio perfecto en subjuegos de $G(\delta)$ con pagos v.

Preguntas

1. Explique por medio de un ejemplo la principal debilidad del clásico folk theorem, que luego resolvería Friedman (1971).

Respuesta:

1/2	C	D
C	$3,3$	$0,4$
D	$4,0$	$1,1$

1/2	A	D
A	$2,3$	$1,5$
D	$0,1$	$0,1$

Al primer juego lo denotaremos G_1 y al segundo G_2. En ambos juegos el pago minmax de cada jugador es 1 y jugando D cada jugador logra que su oponente obtenga ese pago. En ambos juegos la *estrategia del disparo* implican que cada jugador cambie a D para siempre en respuesta a cualquier desviación de la trayectoria de equilibrio. En G_1 la acción D domina la acción C, entonces es un resultado estable para cada jugador escoger D. Por lo tanto, existe una justificación para un castigador que cree que una desviación señala el fin de la orden estable actual para elegir la acción D en el futuro. Por el contrario, en G_2 una repetición constante de (D, D) no es un orden estable ya que A domina estrictamente D para el jugador 1. Por lo tanto, el jugador 1 sufre el castigo que inflige a su oponente, haciendo no creíble su amenaza de castigar una desviación.

2. ¿Siempre los pagos obtenidos en equilibrio perfecto en subjuegos del juego repetido infinitamente, son mejores que el pago del equilibrio de Nash del juego estático?

Respuesta:

La respuesta es negativa. Para probar basta un ejemplo. Considere la siguiente matriz de pagos:

$1/2$	A	B	C
A	$2,2$	$2,1$	$0,0$
B	$1,2$	$1,1$	$-1,0$
C	$0,0$	$0,-1$	$-1,-1$

En juego estático existe un único equilibrio de Nash: (A,A). De hecho la estrategia A es estrictamente dominante para ambos jugadores.

vamos a demostrar que si $\delta \geq \frac{1}{2}$, este juego tiene un Equilibrio Perfecto en Subjuegos en el cual (B,B) es jugado en cada período.

Utilizaremos la estrategia "el garrote y la zanahoria[1]":

I.Jugar B en cada período hasta que alguien se desvíe, en tal caso aplicar II.

II. Jugar C. Si nadie se desvia, regresar a aplicar I. Si alguien se desvía permanecer aplicando II.

Se deben analizar dos posibles casos:

a) En le periodo $t-1$ nadie se desvió. El jugador i tiene dos posibles opciones:

-Seguir la estrategia, esto es jugar B. En tal caso el pago del juego completo para el individuo i sería:[2]

$$\begin{aligned}
&= (1-\delta)[1+\delta^1(1)+\delta^2(1)+...] \\
&= (1-\delta)[(1)\frac{1}{1-\delta}] \\
&= 1
\end{aligned}$$

-Desviarse de la estrategia, esto es jugar A (notar que este sería el mejor desvío). En tal caso el pago del juego completo para el individuo i sería:

$$\begin{aligned}
&= (1-\delta)[2-\delta^1(1)+\delta^2(1)+...] \\
&= (1-\delta)[2-\delta+\sum_{t=2}^{\infty}\delta^t] \\
&= (1-\delta)[2-\delta+1+\delta+\sum_{t=2}^{\infty}\delta^t-1-\delta]
\end{aligned}$$

Note que se usó el truco de agregar los "ceros convenientes" que sean necesarios para poder completar la progresión aritmética. En este caso se agregaron: $+1, -1$ y $\delta, -\delta$.

$$
\begin{aligned}
&= (1-\delta)[2 - 2\delta + \frac{1}{1-\delta} - 1] \\
&= (1-\delta)[2(1-\delta) + \frac{1}{1-\delta} - 1] \\
&= (1-\delta)[2(1-\delta) + \frac{1-(1-\delta)}{1-\delta}] \\
&= (1-\delta)[\frac{2(1-\delta)(1-\delta) + 1 - (1-\delta)}{1-\delta})] \\
&= 2(1-\delta)(1-\delta) + 1 - (1-\delta) \\
&= 1 + (1-\delta)[2(1-\delta) - 1] \\
&= 1 + (1-\delta)[2 - 2\delta - 1] \\
&= 1 + (1-\delta)(1-2\delta)
\end{aligned}
$$

En tal caso, el jugador i decidirá seguir jugando la estrategia siempre que:

$$
\begin{aligned}
&1 \geq 1 + (1-\delta)(1-2\delta) \\
&0 \geq (1-\delta)(1-2\delta) \\
&0 \geq 1 - 2\delta - \delta + 2\delta^2 \\
&0 \geq 2\delta^2 - 3\delta + 1
\end{aligned}
$$

Para encontrar las raíces de $2\delta^2 - 3\delta + 1$ aplicamos la función cuadrática, entonces:

$$\frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(1)}}{2(2)}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{1}}{4}$$

Lo cual tiene dos soluciones: $\frac{3+1}{4} = 1$ y $\frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$. Sin embargo, debido a la restricción de que $\delta \in [0, 1)$ únicamente es válida la respuesta en la cual $\delta = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, $1 \geq 1 + (1-\delta)(1-2\delta)$ siempre y cuando $\delta \geq 1/2$.

b) En el período $t-1$ alguien se ha desviado de la estrategia. El jugador i tiene dos posibles opciones:

-Seguir la estrategia, esto es jugar C. En tal caso el pago del juego completo para el individuo i sería:

$$
\begin{aligned}
&= (1-\delta)[-1 + \delta^1(1) + \delta^2(1) + ...] \\
&= (1-\delta)[-1 - 1 + 1 + \delta + \delta^2 + ...] \\
&= (1-\delta)[\frac{-2(1-\delta) + 1}{1-\delta}] \\
&= -2(1-\delta) + 1
\end{aligned}
$$

-Desviarse de la estrategia, esto es jugar A. En tal caso el pago del juego completo para el individuo i sería:

$$\begin{aligned} &= (1-\delta)[0 + \delta^1(-1) + \delta^2(1) + ...] \\ &= 1 - (1-\delta)(1+2\delta) \end{aligned}$$

En tal caso, el jugador i decidirá seguir jugando la estrategia siempre que:

$$\begin{aligned} -2(1-\delta) + 1 &\geq 1 - (1-\delta)(1+2\delta) \\ -2 + 2\delta + 1 &\geq 1 - 1 - 2\delta + \delta + 2\delta^2 \\ -1 + 2\delta &\geq 2\delta^2 - \delta \\ 2\delta^2 - 3\delta + 1 &\leq 0 \end{aligned}$$

Igual que antes, aplicando la función cuadrática resulta que lo anterior se cumple siempre que $\delta \geq 1/2$.

3. Considere la siguiente matriz de pagos.

$1/2$	L	R
U	$-2, 2$	$1, -2$
M	$1, -2$	$-2, 2$
D	$0, 1$	$0, 1$

Encuentre el valor minmax de cada jugador.

Respuesta:

Iniciemos con el jugador 1. Primero debemos calcular el pago esperado (PE) de jugar cada una de sus tres estrategias. Sea q la probabilidad de que el 2 juegue su estrategia L. Tenemos:

$$\begin{aligned} PE_U &= -2q + (1-q)1 \\ &= -3q + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} PE_M &= q + (1-q)(-2) \\ &= 3q - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} PE_D &= 0q + (1-q)0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Desde que siempre puede garantizar un pago de cero al jugar D, su pago minmax deberá ser al menos esta cantidad. Ahora la pregunta es qué valores de q puede escoger el agente 2 para asegurar que 1 reciba como minmax exactamente cero. Para ello minimizamos el máximo de los pagos generados por las estrategias U y M, lo cual ocurre cuando los dos son iguales. Es decir

$$-3q + 1 = 3q - 2$$

Con lo cual,

$$q = 1/2.$$

Evaluando en las funciones correspondiente tenemos $PE_U(1/2) = PE_M(1/2) = -1/2$. Note que

$$\max(PE_U(q), PE_M(q)) \leq 0$$

para todo $q \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$. Entonces el jugador 2 puede escoger cualquier q en este rango.

Ahora hacemos lo análogo con el jugador 2. Sea p_U la probabilidad de que el jugador 1 juegue U, p_M la probabilidad de que juegue M y $(1 - p_U - p_M)$ la probabilidad de que juegue D. Los pagos esperados son

$$PE_L = 2p_U - 2p_M + (1 - p_U - p_M)$$

$$PE_R = -2p_U + 2p_M + (1 - p_U - p_M)$$

Igualando

$$2p_U - 2p_M + 1 - p_U - p_M = -2P_U + 2p_M + 1 - p_U - p_M$$

con lo cual obtenemos $p_U = p_M$. Finalmente note que utilizando esta última condición tenemos que el único valor que minimiza PE_L y PE_R es $p_U = p_M = 1/2$. Por tanto, el valor minmax del jugador 2 será cero.

Referencias

Friedman, J. (1971): A Noncooperative Equilibrium for Supergames. Review of Economic Studies, 38, 1-12.