# IN78O-1 Microeconomía Avanzada (segunda parte)

**Profesor:** Matteo Triossi Verondini
**Auxiliar:** María Haydée Fonseca Mairena

Auxiliar N°7

Primavera 2018

### Temas a abordar

- Juego tipo Bertrand.
- Juego tipo Stackelberg.
- Una aplicación del Equilibrio de Nash.

## Equilibrio de Nash

*Competencia tipo Bertrand.* Asuma una situación de competencia oligopólica en donde existen dos firmas que compiten vía precios ofreciendo un producto homogéneo. Supondremos además que el costo de producción es idéntico e igual a $c$ y que cada una tiene capacidad suficiente como para abastecer por sí sola el total de la demanda, la cual está representada por la función $Q = A - P$. Asuma que si ambos productores ofrecen un mismo precio, la demanda se distribuirá entre ambos equitativamente.

1. Encuentre el equilibrio de Nash. Especifique cuáles serán los beneficios de las empresas en equilibrio y cuál será la demanda global.

**Respuesta:**

Dado que los producto son sustitutos perfectos para los consumidores, el precio será la única variable relevante para elegir a quien comprar. Por esta razón, si tenemos dos competidores, el precio final del producto en el mercado estará determinado por

$$P = \min\{P_1, P_2\}.$$

La demanda, dado este precio será

$$Q = A - P.$$

Donde es una constante, y ella será completamente adjudicada a la firma que cobre un precio menor. Asumimos, en este punto, que si ambos productores ofrecen un mismo precio, la demanda se distribuirá entre ambos equitativamente, es decir, cada uno de ellos abastecerá la mitad de ésta. Luego, la demanda que enfrenta una firma que compite con otra en precios con producto homogéneo será:

$$D_1(P_1) = \begin{cases} A - P_1, & P_1 < P_2 \\ \frac{1}{2}(A - P_1), & P_1 = P_2 \\ 0, & P_1 > P_2 \end{cases}$$

Ya que ambas firmas compiten por capturar el total de la demanda, la reacción óptima de la firma 1 al precio $P_2$ será:

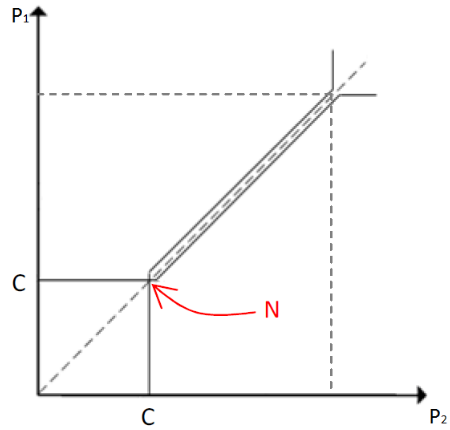
$$P_1(P_2) = \begin{cases} P^M = \frac{A+c}{2}, & P^M < P_2 \\ P_2 - \epsilon, & c < P_2 \leq P^M \\ c, & P_2 \leq c \end{cases}$$

Dado que, fijando un precio infinitesimalmente menor al del rival, una de las partes puede capturar toda la demanda, ambas firmas competirán rebajando el precio hasta que sus beneficios sean nulos, es decir, hasta que el precio iguale a su costo marginal. La situación de equilibrio que se logra es aquella en que ambas fijan un precio igual al $c$.

Los beneficios de cada firma son $\pi_i(p_i, p_j) = 0$. Los consumidores, por su parte, demandarán $Q_i = \frac{1}{2}(A - c)$ a cada una de las firmas.

2. Grafique las funciones de reacción e identifique el equilibrio de Nash.

**Respuesta:**




3. Explique la paradoja de Bertrand.

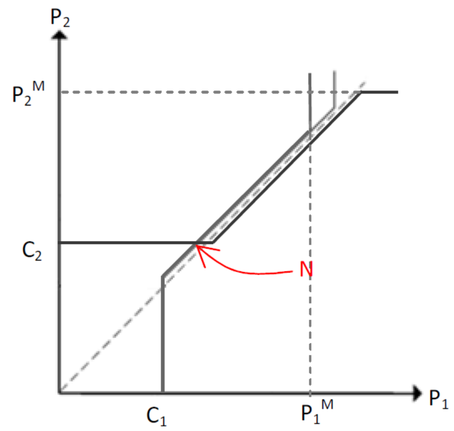
**Respuesta:**
El resultado del modelo de competencia a la Bertrand es equivalente al de la competencia perfecta, en el sentido que los precios se igualan al costo marginal y las rentas se disipan completamente. A este resultado se le conoce como la paradoja de Bertrand, pues bastan dos empresas para lograr el óptimo competitivo.

4. Ahora asuma asimetría en los costos. Específicamente suponga que la firma 1 es más eficiente que su rival, es decir $c_1 < c_2$. Encuentre las funciones de reacción de cada empresa, el equilibrio de Nash y los beneficios de cada firma en equilibrio. Grafique el equilibrio.

**Respuesta:**
En reacción al precio fijado por su rival, cada empresa recortará su precio hasta alcanzar su propio costo marginal. Como tienen costos diferentes, el punto de quiebre de las funciones de reacción no serán iguales. Esta función para las firmas $i = 1, 2$, estará dada por:

$$P_i(P_j) = \begin{cases} P_i^M = \frac{A+c_i}{2}, & P_i^M < P_j \\ P_j - \epsilon, & c_i < P_j \leq P_i^M \\ c_i, & P_j \leq c_i \end{cases}$$

Si graficamos ambas en un mismo espacio de coordenadas obtenemos esta vez la siguiente figura:




El nuevo Equilibrio de Nash será alcanzado cuando la firma más ineficiente ya no pueda seguir reduciendo su precio para competir. La firma 1, fijando $P_1 = c_2 - \epsilon$, capturará toda la demanda del mercado, obteniendo ella misma beneficios positivos. Como consecuencia de ello tendremos los siguientes beneficios para cada firma:

$$\Pi_2 = 0$$

$$\Pi_1 = ((c_2 - \epsilon) - c_1)(A - (c_2 - \epsilon)) \approx (c_2 - c_1)(A - c_2)$$

# Equilibrio Perfecto en Subjuegos

*Duopolio a la Stackelberg.* Igual que en el duopolio a la Cournot, existen dos firmas que escogen sus niveles de producción $q_1$ y $q_2$ para el jugador 1 y jugador 2 respectivamente. La diferencia radica en que ahora la decisión de los niveles de producción no se toman de forma simultánea, sino en dos etapas. En la primera etapa elige la firma 1, y en la segunda etapa la firma 2 observa lo realizado por la firma 1 y en base a ello toma su decisión de producción. Considere que no existen costos de producción y que la función de demanda es lineal, con $p(q) = 12 - q$, donde $q = q_1 + q_2$.

1. Escriba la función de utilidad de cada jugador.

**Respuesta:**

La función de utilidad de cada jugador viene dada por:

$$u_i(q_1, q_2) = [12 - (q_1 + q_2)]q_i$$

2. Platee y resuelva el problema de maximización de cada agente y encuentre el EPS.

**Respuesta:**

Sea $Q_1$ y $Q_2$ el espacio de las cantidades $q_1$ y $q_2$ factibles. Como hemos dicho, la estructura del juego es tal que el jugador 2 observa lo realizado por el jugador 1 y en base a ello toma su decisión de producción, por tanto, $s_2 : Q_1 \to Q_2$. El jugador 2 debe entonces resolver el siguiente problema de maximización:

$$\max_{q_2} u_2(q_1, q_2)$$

$$\max_{q_2} [12 - (q_1 + q_2)]q_2$$

resolviendo obtenemos,

$$\frac{\partial u_2}{\partial q_2} : \; 12 - q_1 - 2q_2 = 0$$
$$\Rightarrow q_2 = 6 - q_1/2$$

A lo cual, igual que en Cournot, llamaremos corresponde a la función de reacción del jugador 2. Es decir, $r_2(q_1) = q_2 = 6 - q_1/2$. Por otra parte, el equilibrio de Nash requiere que la estrategia del jugador 1 maximice sus pagos dado que $s_2 = r_2$. Entonces la cantidad de equilibrio para la firma , $q_1^*$, es la solución de:

$$\max_{q_1} u_1(q_1, r_2(q_1))$$

$$\max_{q_1} [12 - (q_1 + (6 - q_1/2))]q_1$$

resolviendo obtenemos,

$$\frac{\partial u_1}{\partial q_1} : \; 12 - 2q_1 - 6 + q_1 = 0$$
$$\Rightarrow q_1 = 12 - 6$$
$$\Rightarrow q_1^* = 6$$

Entonces, reemplazando la cantidad óptima de la firma 1, $q_1^* = 6$ en la función de reacción de la firma 2, $r_2(q_1) = q_2 = 6 - q_1/2$, obtenemos:

$$r_2(q_1 = 6) = 6 - 6/2$$
$$r_2 = 3$$

El nivel de producción $(q_1^*, r_2(q_1^*)) = (6, 3)$, es un equilibrio de Nash y se conoce como resultado Stackelberg. Note que reemplazando las cantidades de equilibrio $q_1^*$ y $r_2$ en las funciones de utilidad de cada jugador, obtenemos que los pagos subyacentes serán: $u_1 = 18$ y $u_2 = 9$.

3. ¿Existe algún otro Equilibrio de Nash? Explique en qué se diferencia con el encontrado anteriormente.

**Respuesta:**

A pesar de que el resultado Stackelberg luce como una predicción natural de este juego, existen muchos otros equilibrios de Nash. Uno de ellos es de hecho la cantidad de Cournot: $q_1 = q_1^c = 4$ y $s_2(q_1) = q_2^c = 4$ para todo $q_1$. Note que este es efectivamente un equilibrio de Nash pues si la producción del jugador 2 va a ser $s_2(q_1) = q_2^c = 4$ independientemente de lo que produzca la firma 1, entonces el problema de maximización de la firma 1 es: $\max_{q_1} u_1(q_1, q_2^c)$, cuya solución es $q_1 = q_1^c = 4$. Por tanto, el pago del jugador 2 será $u_2(q_1^c, s_2(q_1^c)$ es cual es maximizado por cualquier por cualquier estrategia $s_2$ tal que $s_2(q_1^c) = q_2^c$, incluyendo la estrategia constante $s_2(\cdot) \equiv q_2^c$. Note sin embargo que esta estrategia no es la mejor respuesta para otro nivel de producción que el jugador 1 podría haber escogido pero no lo hizo.

Entonces hemos encontrado dos equilibrios para este juego. Sin embargo, el primero parece ser más razonable. En la literatura se suele decir que el segundo tipo de equilibrio que puede aparecer en juegos de este tipo (dinámicos) es "no creíble". El refinamiento al Equilibrio de Nash que logra eliminar equilibrios no creíbles es lo que conocemos como *Equilibrio Perfecto en Subjuegos* y es el concepto de solución para juegos dinámicos.

# Una aplicación del equilibrio de Nash.

Sabemos que en algunos países las disputas salariales se resuelven mediante una decisión arbitraria vinculante. Aquí veremos un ejemplo sencillo (inspirado de Farber, 1980).
Supongamos que las partes en disputa son una empresa y un sindicato, y que la disputa es acerca de salarios. Supongamos que el juego se desarrolla de la siguiente manera: primero, la empresa y el sindicato realizan simultáneamente ofertas, denominadas $w_e$ y $w_s$. En segundo lugar, el árbitro elige una de las dos ofertas. Supongamos que el árbitro tiene un acuerdo ideal que le gustaría imponer que denominamos $x$. Supongamos además que, tras observar las ofertas de las partes, $w_e$ y $w_s$, el árbitro elige simplemente la oferta más cercana a $x$ (asuma que $w_e < w_s$), de tal forma que el árbitro elige $w_e$ si $x < (w_e + w_s)/2$, por otra parte el árbitro elige $w_s$ si $x > (w_e + w_s)/2$, finalmente si $x = (w_e + w_s)/2$, el árbitro lanza una moneda.
El valor de $x$ es conocido por el árbitro pero no por las partes. Las partes creen que $x$ se distribuye aleatoriamente según una distribución de probabilidad $F(x)$, con la correspondiente función de densidad $f(x)$.

1. Plantee las condiciones de primer orden del problema de optimización de la empresa y el sindicato suponiendo que la empresa quiere minimizar el salario esperado impuesto por el árbitro y el sindicato quiere maximizarlo.

**Respuesta:**

Dada la especificación acerca del comportamiento del árbitro, si las ofertas son $w_e$ y $w_s$, las partes creen que las probabilidades Prob$\{w_e$ sea elegida$\}$ y Prob$\{w_s$ sea elegida$\}$ pueden ser expresadas de las siguiente forma:

$$\text{Prob}\{w_e \text{ sea elegido}\} = \text{Pro}\left\{x < \frac{w_e + w_s}{2}\right\} = F\left(\frac{w_e + w_s}{2}\right)$$

y

$$\text{Prob}\{w_s \text{ sea elegido}\} = 1 - F\left(\frac{w_e + w_s}{2}\right)$$

Así el acuerdo salarial esperado es

$$w_e \cdot \text{Prob}\{w_e \text{elegido}\} + w_s \cdot \text{Prob}\{w_s \text{elegido}\} = w_e \cdot F\left(\frac{w_e + w_s}{2}\right) + w_s \cdot \left[1 - F\left(\frac{w_e + w_s}{2}\right)\right]$$

Suponiendo que la empresa quiere minimizar el salario esperado impuesto por el árbitro mientras el sindicato quiere maximizarlo. Si el par de ofertas $(w_e^*, w_s^*)$ ha de constituir un equilibrio de Nash del juego entre la empresa y el sindicato, $w_e^*$ debe ser una solución de

$$\min_{w_e} w_e \cdot F\left(\frac{w_e + w_s^*}{2}\right) + w_s^* \cdot \left[1 - F\left(\frac{w_e + w_s^*}{2}\right)\right]$$

CPO

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\cdot)}{\partial w_e} = 0 \Rightarrow & \frac{1}{2} w_e f\left(\frac{w_e + w_s^*}{2}\right) + F\left(\frac{w_e + w_s^*}{2}\right) - \frac{1}{2} w_s^* f\left(\frac{w_e + w_s^*}{2}\right) = 0 \\ \Rightarrow & (w_s^* - w_e^*) \cdot \frac{1}{2} f\left(\frac{w_e^* + w_s^*}{2}\right) = F\left(\frac{w_e^* + w_s^*}{2}\right)\end{aligned}$$

Por otra parte, $w_s^*$ debe ser una solución de

$$\max_{w_s} w_e^* \cdot F\left(\frac{w_e^* + w_s}{2}\right) + w_s \cdot \left[1 - F\left(\frac{w_e^* + w_s}{2}\right)\right]$$

CPO

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial w_s} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} w_e^* f\left(\frac{w_e^* + w_s}{2}\right) + 1 - \frac{1}{2} w_s f\left(\frac{w_e^* + w_s}{2}\right) - F\left(\frac{w_e^* + w_s}{2}\right) = 0$$
$$\Rightarrow (w_s^* - w_e^*) \cdot \frac{1}{2} f\left(\frac{w_e^* + w_s^*}{2}\right) = \left[1 - F\left(\frac{w_e^* + w_s^*}{2}\right)\right]$$

2. Demuestre que la distancia entre las ofertas debe ser igual a la inversa del valor de la función de densidad evaluada en la mediana del acuerdo preferido por el árbitro.

**Respuesta:**

Puesto que los términos de la izquierda de ambas ecuaciones de CPO son iguales, los términos de la derecha deben asimismo ser iguales, es decir

$$F\left(\frac{w_e^* + w_s^*}{2}\right) = \left[1 - F\left(\frac{w_e^* + w_s^*}{2}\right)\right]$$

$$2F\left(\frac{w_e^* + w_s^*}{2}\right) = 1$$

$$F\left(\frac{w_e^* + w_s^*}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

esto es, la oferta media debe ser igual a la mediana del acuerdo preferido por el árbitro. Sustituyendo esta última expresión en cualquiera de las CPO (lo haremos en el de la empresa) tenemos:

$$(w_s^* - w_e^*) \cdot \frac{1}{2} f\left(\frac{w_e^* + w_s^*}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$w_s^* - w_e^* = \frac{1}{f\left(\frac{w_e^* + w_s^*}{2}\right)}$$

3. Suponga que $x$ se distribuye normalmente con media $m$ y varianza $\sigma^2$. Encuentre las ofertas de equilibrio de Nash e interprete. Nota: Tome en cuenta que la función de densidad de una distribución normal con media $m$ y varianza $\sigma^2$ es: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2\right\}$.

**Respuesta:**

En este caso sabemos que la función de densidad es

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \text{exp}\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2\right\}$$

Puesto que una distribución normal es simétrica con respecto a su media, la mediana de la distribución es igual a su media $m$.

$$\frac{w_e^* + w_s^*}{2} = m$$

Por lo tanto, del resultado en ítem (2) tenemos

$$w_s^* - w_e^* = \frac{1}{f(m)} = \sqrt{2\pi\sigma^2}$$

Con estas dos últimas ecuaciones tenemos

$$w_e^* = 2m - w_s^*$$

$$w_s^* - 2m + w_s^* = \sqrt{2\pi\sigma^2}$$

$$w_s^* = \frac{2m + \sqrt{2\pi\sigma^2}}{2}$$

$$w_s^* = m + \sqrt{\frac{\pi\sigma^2}{2}}$$

Análogamente tenemos

$$w_e^* = m - \sqrt{\frac{\pi\sigma^2}{2}}$$

Siendo estas últimas dos expresiones las ofertas de equilibrio de Nash.

Así, en equilibrio, las ofertas de ls partes se centran alrededor de la esperanza del acuerdo preferido por el árbitro (es decir, $m$), y la distancia entre las ofertas aumenta con la incertidumbre de las partes acerca del acuerdo preferido por el árbrito (es decir, $\sigma^2$).

# Referencias

- Ejericio 1. Apunte de Microeconomía II, profesor Aldo González. Universidad de Chile. El paper original de Bertrand en donde se inspiran estos ejercicios es: Bertrand, J., 1883, *Theorie Mathematique de la Richesse Sociale*, Journal des Savants, pp. 499-508.
- Ejericio 2. Este ejercicio es estándar. El paper original de donde se inspiran los ejercicios de este tipo es: Stackelberg H. (1934) *Markfform und Gleichgewicht*. Julius Springer, Vienna.
- Ejercicio 3. Gibbons (1992). A Primer in Game Theory. El ejercicio es una aplicación de Farber, H. S. *An Analysis of Final Offer Arbitration*. Journal of Conflict Resolution, 24(4), 1980, 683–705.