IN78O-1 Microeconomía Avanzada (segunda parte)

Profesor: Matteo Triossi Verondini
Auxiliar: María Haydée Fonseca Mairena

Tarea N°4

Primavera 2018

Fecha de entrega: 10 de diciembre

Pregunta 1

1. Supongamos que la relación de equivalencia sobre loterías $\succsim$ satisfface el Axioma de Independencia. Entonces demuestre que para cada $L_1, L_2, L_3, L_4 \in \mathcal{L}$ y $0 < \alpha < 1$ se verifia que:

   a) $L_1 \succ L_2 \Leftrightarrow \alpha L_1 + (1-\alpha)L_3 \succ \alpha L_2 + (1-\alpha)L_3$.

   b) $L_1 \sim L_2 \Leftrightarrow \alpha L_1 + (1-\alpha)L_3 \sim \alpha L_2 + (1-\alpha)L_3$.

   c) Si $L_1 \succ L_2$ y $L_3 \succ L_4$, entonces $\alpha L_1 + (1-\alpha)L_3 \succ \alpha L_2 + (1-\alpha)L_4$.

Respuesta:

a) Supongamos $L_1 \succ L_2$, entonces $L_1 \succeq L_2$ y por el Axioma de independencia se verifica que $\alpha L_1 + /1-\alpha)L_3 \succeq \alpha L_2 + (1-\alpha)L_3$. Veamos que la preferencia es estricta. En caso contrario, tendríamos que $\alpha L_1 + (1-\alpha)L_3 \sim \alpha L_2 + (1-\alpha)L_3$, con lo que $\alpha L_2 + (1-\alpha)L_3 \succeq \alpha L_1 + (1-\alpha)L_3$ y por el Axioma de Independencia entonces tendríamos que $L_2 \succeq L_3$ lo que contradice la hipótesos. Por lo tanto, $\alpha L_1 + (1-\alpha)L_3 \succ \alpha L_2 + (1-\alpha)L_3$.

   Para la otra dirección, supongamos que $\alpha L_1 + (1-\alpha)L_3 \succ \alpha L_2 + (1-\alpha)L_3$. Por el Axioma de Independencia tenemos que $L_1 \succeq L_2$. De nuevo si $L_1 \sim L_2$ entonces $L_2 \succeq L_1$ y por tanto, $L_1 \succ L_2$.

b) Supongamos que $L_1 \sim L_2$. Entonces $L_1 \succeq L_2$ y $L_2 \succ L_1$. Por Axioma de Independencia tenemos que

$$\alpha L_1 + (1-\alpha)L_3 \succeq \alpha L_2 + (1-\alpha)L_3$$

$$\alpha L_2 + (1-\alpha)L_3 \succeq \alpha L_1 + (1-\alpha)L_3$$

   de donde $\alpha L_1 + (1-\alpha)L_3 \sim \alpha L_2 + (1-\alpha)L_3$.

   Para el otro sentido notemos que si $\alpha L_1 + (1-\alpha)L_3 \sim \alpha L_2 + (1-\alpha)L_3$, entonces $\alpha L_1 + (1-\alpha)L_3 \succeq \alpha L_2 + (1-\alpha)L_3$ y $\alpha L_2 + (1-\alpha)L_3 \succeq \alpha L_1 + (1-\alpha)L_3$. Aplicamos Axioma de Independencia y obtenemos que

$$L_1 \succeq L_2, \quad L_2 \succeq L_1$$

   por lo que $L_1 \sim L_2$.

c) Supongamos $L_1 \succ L_2$ y $L_3 \succ L_4$. Utilizando Axioma de Independencia el resultado del item (a) tenemos que

$$\alpha L_1 + (1-\alpha)L_3 \succ \alpha L_2 + (1-\alpha)L_3$$

   y

$$\alpha L_2 + (1-\alpha)L_3 \succ \alpha L_2 + (1-\alpha)L_4$$

   Por transitividad, $\alpha L_1 + (1-\alpha)L_3 \succ \alpha L_2 + (1-\alpha)L_4$.

2. Demuestre que una función de utilidad $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ está en forma de utilidad esperada si y sólo si $U\big(\sum_{j=1}^k \alpha_j L_j\big) = \sum_{j=1}^k \alpha_j U(L_j)$ para todo conjunto de loterías $L_1, \ldots, L_k \in \mathcal{L}$ y números reales $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \geq 0$ tales que $\sum_{j=1}^k \alpha_j = 1$.

Respuesta:

Supongamos que $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ es una función de utilidad esperada tipo von N-M. de la forma

$$U(p_1, \ldots, p_n) = v_1 p_1 + \ldots + v_n p_n.$$

Consideremos las loterías $L_1, \ldots, L_k \in \mathcal{L}$ y las probabilidades $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \geq 0$ tales que $\sum_{j=1}^k \alpha_j = 1$. Supongamos que

$$L_j = (p_1^j, \ldots, p_n^j), \quad j = 1, \ldots, k.$$

Entonces,

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j L_j = (p_1, \ldots, p_n)$$

con $p_l = \sum_{j=1}^k \alpha_j p_l^j$ por lo que

$$\begin{aligned} u(L) &= \sum_{l=1}^n p_l v_l \\ &= \sum_{l=1}^n \left(\sum_{j=1}^k \alpha_j p_l^j \right) v_l \\ &= \sum_{j=1}^k \alpha_j \left(\sum_{l=1}^n p_l^j u_l \right) \\ &= \sum_{j=1}^k \alpha_j u(L_j) \end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos que $U(\sum_{j=1}^k \alpha_j L_j) = \sum_{j=1}^k \alpha_j U(L_j)$ para todo conjunto de loterías $L_1, \ldots, L_k \in \mathcal{L}$ y números reales $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \geq 0$ tales que $\sum_{j=1}^k \alpha_j = 1$. Consideramos las loterías

$$e_1 = u(1, 0, \ldots, 0)$$

$$e_2 = u(0, 1, \ldots, 0)$$

así sucesivamente hasta

$$e_n = u(0, 0, \ldots, 1)$$

y definimos

$$v_i = u(e_i)$$

Dada una lotería $L = (p_1, \ldots, p_n)$ podemos representarla como

$$L = \sum_{j=1}^k p_j e_j$$

por lo que

$$U(L) = \sum_{j=1}^k p_j U(e_j) = \sum_{j=1}^k p_j v_j$$

Pregunta 2

Se considera que un activo es un derecho a unos pagos estipulados (positivos o negativos) en el futuro. Supongamos que un agente averso al riesgo puede elegir entre dos activos. Un activo sin riesgo, que paga una unidad monetaria en cada estado de la naturaleza y un activo con riesgo, que identificamos con un lotería, cuya función de distribución es $F(z)$. Suponemos que

$$\int z dF(z) > 1$$

es decir, el pago esperado con el activo de riesgo es mayor que con el activo seguro. Suponga que la riqueza inicial es ω. Sea α la cantidad de activo de riesgo que compra y β la cantidad de activo seguro que compra. Suponga que el precio de ambos activos es 1.
Probar que el agente, compra una cantidad positiva del activo con riesgo.

Respuesta:
La restricción presupuestaria es

$$\alpha + \beta = \omega$$

y la riqueza esperada es $\int(\alpha z + \beta)dF(z)$. La función de utilidad del agente es

$$V(\alpha, \beta) = \int v(\alpha z + \beta)dF(z)$$

(Suponemos utilidad esperada). El problema de elección de la cartera es

$$\begin{aligned} &\text{máx } U(\alpha, \beta) \\ &\text{s.a. } \alpha + \beta = \omega \\ &\qquad \alpha, \beta \geq 0 \end{aligned}$$

Sustituyendo $\beta = \omega - \alpha$, el problema anterior es equivalente a

$$\begin{aligned} &\text{máx } \int v(\alpha z - \alpha + \omega)dF(z) \\ &\text{s.a } 0 \leq \alpha \leq \omega \end{aligned}$$

Sea la función $\varphi(\alpha) = \int v(\alpha z - \alpha + \omega)dF(z)$. Derivando la función objetivo φ, obtenemos

$$\varphi'(\alpha) = \int (z-1)v'(\alpha z - \alpha + \omega)dF(z)$$

$$\varphi''(\alpha) = \int (z-1)^2 v''(\alpha z - \alpha + \omega)dF(z) < 0$$

porque $(z-1)^2$, $v'' < 0$ (ya que v es cóncava).Vemos que la función objetivo es cóncava, por lo que las condiciones de primer orden son suficientes para determinar la solución del problema. Estas condiciones son

$$\begin{aligned} \varphi'(\alpha) &= 0 \quad \text{si } 0 < \alpha^* < \omega \\ \varphi'(\alpha) &\geq 0 \quad \text{si } \alpha^* = \omega \\ \varphi'(\alpha) &\leq 0 \quad \text{si } \alpha^* = 0 \end{aligned}$$

¿Puede ocurrir que $\alpha^* = 0$? En este caso tendríamos que

$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= \int (z-1)v'(\omega)dF(z) \\ &= v'(\omega)\int (z-1)dF(z) \\ &= v'(\omega)\left(\int z dF(z) - 1\right) \leq 0 \end{aligned}$$

de donde, $\int z dF(z) \leq 1$, ya que $v'(\omega) > 0$. Pero esto contradice que $\int z dF(z) > 1$, como habíamos asumido. Por lo tanto $\alpha^* > 0$. El agente averso al riesgo aceptaría una cantidad positiva de riesgo, si el pago esperado del activo de riesgo es mayor que el pago del activo seguro.

Nota: Recuerde que tendrá puntaje completo solo si muestra a detalle cada uno de los pasos realizados.

Referencia

- Andreu Mas-Colell, Michael D. Whinston y Jerry R. Green. *Microeconomic Theory.* Oxford University Press, 1995.
- Curso de Microeconomía Avanzada, profesor Francisco Marhuenda. Apunte de Elección bajo incertidumbre. Universidad Carlos III.