IN78O-1 Microeconomía Avanzada (segunda parte)

Profesor: Matteo Triossi Verondini
Auxiliar: María Haydée Fonseca Mairena

Auxiliar N°6

Primavera 2018

Temas a abordar

- Elección bajo incertidumbre
- Introducción a la teoría de juegos

La paradoja de Allais

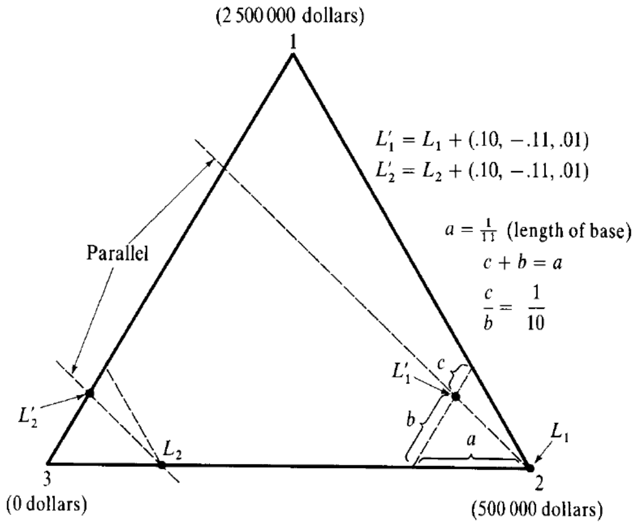
Hay tres posibles premios monetarios (es decir, el número de resultados posibles es $N = 3$).

Primer premio	Segundo premio	Tercer premio
$2,500,000$ dólares	$500,000$ dólares	0 dólares

A los participantes se les realizan dos pruebas.

1. Elegir entre las loterías L_1 y L'_1:
$$L_1 = (0, 1, 0) \qquad L'_1 = (.10, .89, .01)$$
2. Elegir entre las loterías L_2 y L'_2
$$L_2 = (0, .11, .89) \qquad L'_2 = (.10, 0, .90)$$

Respuesta:
Gráficamente,



En los experimentos realizados es común que los individuos expresen la siguiente preferencias

$$L_1 \succ L'_1, \qquad L'_2 \succ L_2$$

Sin embargo, este comportamiento no es consistente con la utilidad esperada. Veamos en la figura. Las lineas conectando L_1 con L_1' y L_2 con L_2' son paralelas. Por tanto, si un individuo que tiene una curva de indiferencia lineal que se encuentra de tal manera que L_1 es preferido a L_1', entonces L_2 debería ser preferido a L_2' y viceversa.
Formalmente, denote por u_{25}, u_{05}, u_0 los valores de utilidad esperada de los tres resultados. Luego, la elección $L_1 \succ L_1'$ implica

$$u_{05} > (,10)u_{25} + (,89)u_{05} + (,01)u_0.$$

Sumando $(,89)u_0 - (,89)u_{05}$ en ambos lados obtenemos

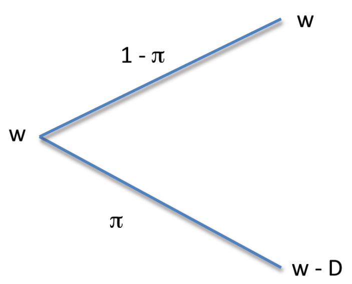
$$(,11)u_{05} + (,89)u_0 > (,10)u_{25} + (,90)u_0.$$

y por tanto cualquier individuo con utilidades v.N-M debe reportar $L_2 \succ L_2'$.

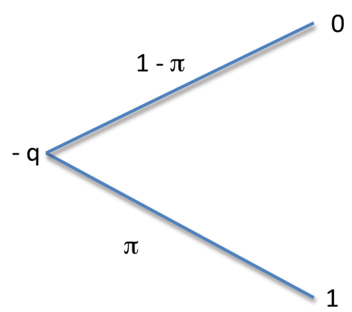
Compra de seguro

Un agente averso al riesgo tiene una riqueza inicial de ω, pero puede perder D u.m. con probabilidad π. Puede comprar un seguro a un precio unitario de q, por unidad monetaria asegurada. Determinar la cantidad de seguro comprada por el agente.

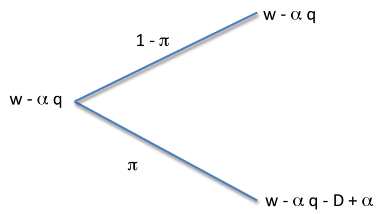
Respuesta:
La situación del agente está representada en la Figura siguiente.



La riqueza esperada es $(1-\pi)\omega + \pi(\omega - D) = \omega - \pi D$. La figura



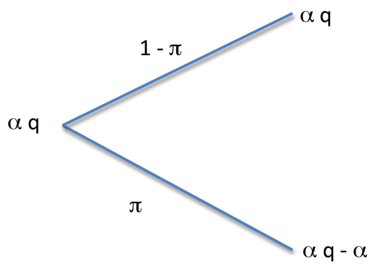
muestra la situación que ofrece el seguro por cada unidad monetaria asegurada, por lo que si el agente comprara α unidades del seguro, se encontraría en la situación siguiente



En este caso, la riqueza esperada es $(1-\pi)(\omega-\alpha q)+\pi(\omega-\alpha q-D+\alpha)=\omega-\pi D+\alpha(\pi-q)$. El seguro es *actuarialmente justo* si esta esperanza coincide con la esperanza sin seguro, es decir, si ocurre que

$$\omega-\pi D=\omega-\pi D+\alpha(\pi-q)$$

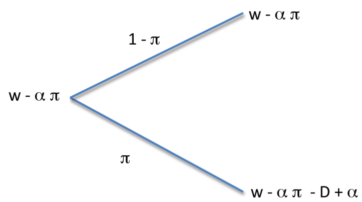
o lo que es lo mismo, si $q=\pi$. Supongamos que se verifica esto. En este caso, la situación para la empresa aseguradora es la siguiente



Por lo que su ganancia esperada es

$$(1-\pi)\alpha q+\pi(\alpha q-\alpha)=\alpha(q-\pi)$$

que es 0 si y solo si $q=\pi$, es decir si y sólo si el seguro es actuarialmente justo. Tomando ahora $q=\pi$, tenemos que, desde el punto de vista del agente, la situación es



Supongamos que el agente tiene utilidad esperada

$$U(\alpha)=(1-\pi)v(\omega-\alpha\pi)+\pi v(\omega-\alpha\pi-D+\alpha)$$

siendo v una función creciente y cóncava (porque el agente es averso al riesgo). La función v es la utilidad del agente en cantidades monetarias. El problema del agente es

$$\text{máx } (1-\pi)v(\omega-\alpha\pi)+\pi v(\omega-\alpha\pi-D+\alpha)$$

$$\text{s.a. } \alpha\geq 0$$

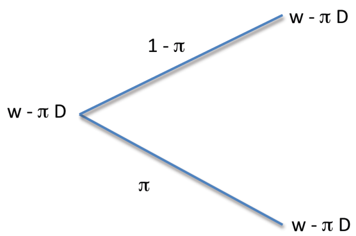
la condición de Kuhn-Tucker es

$$-\pi(1-\pi)v'(\omega-\alpha^*\pi)+(1-\pi)\pi v'(\omega-\alpha^*\pi-D+\alpha^*)\leq 0$$

con igualdad si $\alpha^*>0$. ¿Puede ocurrir que $\alpha^*=0$? En este caso tendríamos que

$$\pi(1-\pi)v'(\omega-D)\leq\pi(1-\pi)v'(\omega)$$

y como $v' > 0$, esto es lo mismo que
$$v'(\omega - D) \leq v'(\omega).$$
Como v es cóncava (y po lo tanto v' es decreciente) deducimos que
$$\omega - D \geq \omega$$
lo cual no es posible (si $D > 0$). Como llegamos a una contradicción, concluimos que $\alpha^* > 0$ y la condición de primer orden se reduce a
$$v'(\omega - \alpha^*\pi) = v'(\omega - \alpha^*\pi - D + \alpha)$$
es decir $\omega - \alpha^*\pi = \omega - \alpha^*\pi - D + \alpha^*$. De donde, la cantidad de seguro comprada es
$$\alpha^* = D$$
Notemos que el agente se asegura completamente, es decir con $\alpha^* = D$ su situación es la siguiente



El consumo es el mismo en todos los estados posibles. No hay riesgo. Un agente averso al riesgo hará esta elección, cuando sea posible.

Dominancia

1. Explique utilizando un ejemplo el concepto de dominancia de primer orden.

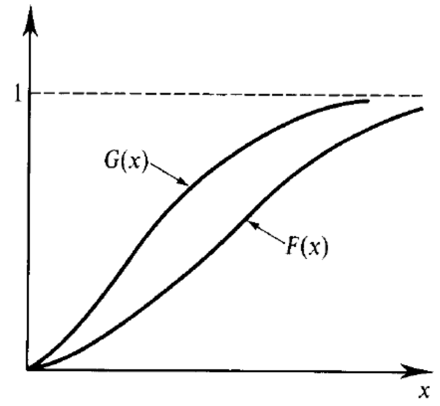
Respuesta:

Consideremos las loterías con función de distribución
$$F(x)\begin{cases}0 & x < \frac{5}{2}\\ 0,4 & \frac{5}{7} \leq x < \frac{7}{2}\\ 1 & \frac{7}{2} \leq x\end{cases} \qquad G(x)\begin{cases}0 & x < 2\\ \frac{1}{2} & 2 \leq x < 3\\ 1 & x \geq 3\end{cases}$$
Como $F(x) \leq G(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, vemos que F domina a G estocásticamente de primer orden.

Esto último porque recuerde que la idea es que $F \succ G \Leftrightarrow$ Dada una cantidad monetaria x, la probabilidad de obtener, al menos x, es mayor con la lotería F que con la lotería G

$\Leftrightarrow$ Dado $x \in \mathbb{R}$, $1 - F(x) \geq 1 - G(x)$

$\Leftrightarrow$ Dado $x \in \mathbb{R}$, $F(x) \leq G(x)$.



2. Asuma un agente con preferencias crecientes. Demuestre que si F domina a G estocásticamente en primer orden, entonces cualquier agente con preferencias crecientes prefiere F a G.

Respuesta:

Nos piden demostrar que F domina a la lotería G estocásticamente de primer orden si y sólo si para toda función $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ creciente se verifica que

$$\int v(x)dF(x) \geq \int v(x)dG(x)$$

Demostración:

($\Leftarrow$) Sea $x_0 \in \mathbb{R}$, definimos

$$v(x) \begin{cases} 1 & \text{si } x > x_0 \\ 0 & \text{si } x \leq x_0 \end{cases}$$

Note que $v(x)$ es creciente y por hipótesis

$$\int_0^\infty v(x)dF(x) \geq \int_0^\infty v(x)dG(x)$$

Vamos a calcular $\int_0^\infty v(x)dF(x)$. Para ello, vamos a suponer que $F'(x) = f(x)$ y que para todo $b > 0$

$$\int_0^b v(x)dF(x) = \int_0^b v(x)f'(x)dx$$

Tomemos ahora $b > x_0$, entonces

$$\begin{aligned} \int_0^b v(x)dF(x) &= \int_0^{x_0} v(x)dF(x) + \int_{x_0}^b v(x)dF(x) \\ &= \int_{x_0}^b dF(x) \\ &= F(b) - F(x_0) \end{aligned}$$

Entonces,

$$\int_0^\infty v(x)dF(x) = \lim_{b\to\infty} (F(b) - F(x_0)) = 1 - F(x_0)$$

Análogamente, $\int_0^\infty v(x)dG(x) = 1 - G(x_0)$. Por tanto,

$$1 - F(x_0) \geq 1 - G(x_0)$$

es decir, $G(x_0) \geq F(x_0)$.

($\Rightarrow$) Supongamos que $v(x)$ es derivable y que $F(a) = G(a) = 1$ para algún $a \in \mathbb{R}$ suficientemente grande. Fijamos ahora $b > 0$,

$$\int_0^b v(x)dF(x) - \int_0^b v(x)dG(x) = v(b)F(b) - \int_0^b v'(x)F(x)dx - v(b)G(b) + \int_0^b v'G(x)dx$$

$$v(b)[F(b) - G(b)] + \int_0^b v'(x)(G(X) - F(x))dx$$

Como $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b) = \lim\limits_{b\to+\infty} G(b) = 1$ tenemos que

$$\int_0^b v(x)dF(x) - \int_0^\infty v(x)dG(x) = \int_0^\infty v'(x)(G(x) - F(x))dx \geq 0.$$

Teoría de Juegos

1. El objetivo del siguiente ejercicio es mostrar que contrario a lo que ocurre con el proceso de eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas, dicho método aplicado a estrategias débilmente dominadas puede generar diferentes resultados de equilibrio dependiendo del orden de eliminación.

   Considere el siguiente juego:

$1/2$	D	E
A	$1,1$	$0,0$
B	$1,1$	$2,1$
C	$0,0$	$2,1$

   (i) Aplique el método de eliminación iterativa de estrategias débilmente dominadas. Indique cuál es el Equilibrio encontrado y sea explícito en el procedimiento.

Respuesta:
Podemos aplicar el proceso de eliminación iterada de la siguiente forma:

- Eliminar A (ya que es débilmente dominada por B).
- Eliminar D (ya que es débilmente dominada por E en el juego reducido).
- El resultado es $EN = \{(B, E), (C, E)\}$ los cuales son equilibrios de Nash.

   (ii) Verifique si su resultado de equilibrio cambia al iniciar el proceso con otra estrategia débilmente dominada.

Respuesta:
Ahora podemos aplicar el proceso de eliminación iterada de la siguiente forma:

- Eliminar C (ya que es débilmente dominada por B).
- Eliminar E (ya que es débilmente dominada por D en el juego reducido).
- El resultado es $EN = \{(A, D), (B, D)\}$ los cuales son equilibrios de Nash.

Con lo cual se verifica que el resultado de este proceso depende del orden de eliminación que se aplique.

2. Considere los siguientes juegos:

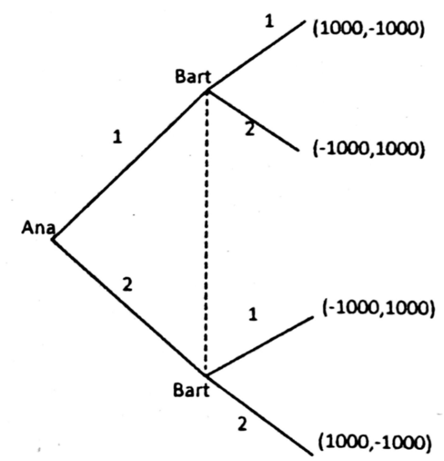
   Caso 1: Considere dos jugadores; Ana y Bart. Ellos deben simultáneamente elegir si mostrar uno o dos dedos. Si la suma total de dedos es par gana Ana y si es impar gana Luis.

   Caso 2: Considere dos jugadores; Ana y Bart. Ellos deben elegir si mostrar uno o dos dedos. Primero Ana decide y le muestra a Bart y una vez Bart observa cuantos dedos mostró Ana, él decide cuántos dedos mostrar. Si la suma total de dedos es par gana Ana y si es impar gana Bart.

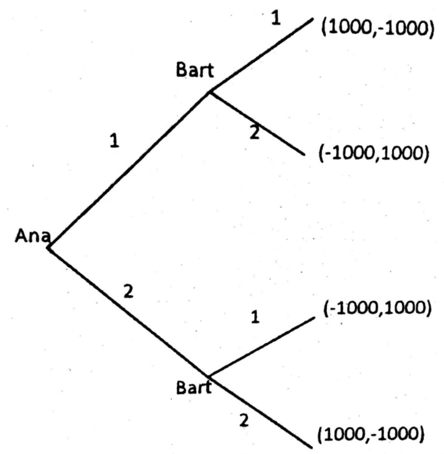
   (i) Exprese ambos juegos en forma extensiva.

Respuesta:

Par o non II, caso 1



Par o non I, caso 2



   (ii) Exprese ambos juegos en forma estratégica.

Respuesta:

Caso 1.

	1	2
1	$1000, -1000$	$-1000, 1000$
2	$-1000, 1000$	$1000, -1000$

Caso 2.

	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,1)$
1	$1000, -1000$	$1000, -1000$	$-1000, 1000$	$-1000, 1000$
2	$-1000, 1000$	$1000, -1000$	$-1000, 1000$	$1000, -1000$

Donde Ana es decide filas mientras Bart columnas.