# Elección bajo incertidumbre

**María Haydée Fonseca-Mairena**

**IN78O-1 Microeconomía Avanzada**
**Profesor:** Matteo Triossi Verondini

Noviembre, 2018

# Motivación

Prácticamente todas las decisiones se toman ante la incertidumbre. Si bien a menudo dependemos de modelos de cierta información como ha visto en la clase hasta ahora, muchos problemas económicos requieren que abordemos la incertidumbre de manera directa.

Por ejemplo:

- ¿Cómo debería el individuo ahorrar para su jubilación cuando se enfrentan a la incertidumbre sobre sus ingresos futuros, el rendimiento de las diferentes inversiones, su salud y sus preferencias futuras?
- ¿Cómo deben las empresas elegir qué productos introducir o precios establecer cuando la demanda es incierta?
- ¿Qué políticas deberían elegir los gobiernos cuando existe incertidumbre sobre la productividad futura, el crecimiento, la inflación y el desempleo?

# Nuestro objetivo en esta clase

Vamos a desarrollar un modelo de comportamiento de elección bajo incertidumbre. Comenzamos con el modelo de utilidad esperado de von Neumann-Morgenstern, que es el caballo de batalla de la economía moderna. Consideraremos los fundamentos de este modelo y luego lo usaremos para desarrollar propiedades básicas de preferencia y elección en presencia de incertidumbre.

# Definición de Lotería

Sea $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ un conjunto de sucesos.

## Lotería Simple (o reducida)

Una *lotería* sobre $C$ es un vector $L = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $p_i \geq 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ y $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Por lo tanto,

$$L = (p_1, \ldots, p_n) \in \Delta^{n-1} = \{p \in \mathbb{R}^n_+ : p_1 + \cdots + p_n = 1\},$$

el simplex de dimensión $n-1$. El espacio de loterías es $\mathcal{L} = \Delta^{n-1}$.

Dadas las loterias $L_1, \ldots, L_k \in \mathcal{L}$ y las probabilidades $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \geq 0$ con $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$.

## Lotería Compuesta

Definimos la lotería compuesta $(L_1, \ldots, L_k; \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ como la lotería cuyo suceso $i = 1, 2, \ldots, k$ es la lotería $L_i$ con probabilidad $\alpha_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$. La lotería reducida asociada a $L = (L_1, \ldots, L_k; \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ es $\alpha_1 L_1 + \cdots + \alpha_k L_k \in \Delta^{n-1}$. Para toda lotería compuesta podemos calcular la correspondiente lotería reducida que genera la distribución última sobre los resultados.

**Premisa**: Vamos a asumir que solo la lotería reducida sobre los resultados finales es relevante para el tomador de decisión.

# Propiedades de una relación de preferencias

Supongamos que hay una relación de preferencias $\succsim$ completa y transitiva, definida sobre $\mathcal{L}$. Dos propiedades razonables que una relación de preferencias $\succsim$ debería satisfacer son:

## Axioma de Continuidad [A1]

Se dice que $\succsim$ es continua si para cada $L_1, L_2, L_3 \in \mathcal{L}$, los conjuntos

$$\{\alpha \in [0,1] : \alpha L_1 + (1-\alpha)L_2 \succsim L_3\} \subseteq [0,1]$$

$$\{\alpha \in [0,1] : L_3 \succsim \alpha L_1 + (1-\alpha)L_2\} \subseteq [0,1]$$

son cerrados.

## Axioma de Independencia [A2]

La relación $\succsim$ satisface el axioma de independencia si para cada $L_1, L_2, L_3 \in \mathcal{L}$ y $0 < \alpha < 1$ se verifica que

$$L_1 \succsim L_2 \Leftrightarrow \alpha L_1 + (1-\alpha)L_3 \succsim \alpha L_2 + (1-\alpha)L_3$$

# Una implicancia del Axioma de Continuidad

Una consecuencia del axioma de continuidad es la siguiente. Supongamos que existen dos loterías $L_0, L_1 \in \mathcal{L}$ tales que para toda otra lotería $L \in \mathcal{L}$ se verifica que

$$L_1 \succsim L \succsim L_0$$

(es decir, $L_0$, y $L_1$ son, respectivamente, la peor y la mejor lotería). Entonces, para cada lotería $L \in \mathcal{L}$ existe un número real $\alpha_L$ tal que

$$L \sim \alpha_L L_1 + (1 - \alpha_L) L_0$$

# Una implicancia del Axioma de Independencia

## Proposición 1.

Supongamos que la relación de equivalencia sobre loterías $\succsim$ satisfface [A2]. Entonces para cada $L_1, L_2, L_3, L_4 \in \mathcal{L}$ y $0 < \alpha < 1$ se verifia que:

1. $L_1 \succ L_2 \Leftrightarrow \alpha L_1 + (1-\alpha)L_3 \succ \alpha L_2 + (1-\alpha)L_3$.
2. $L_1 \sim L_2 \Leftrightarrow \alpha L_1 + (1-\alpha)L_3 \sim \alpha L_2 + (1-\alpha)L_3$.
3. Si $L_1 \succ L_2$ y $L_3 \succ L_4$, entonces $\alpha L_1 + (1-\alpha)L_3 \succ \alpha L_2 + (1-\alpha)L_4$.

Nota: La demostración es parte de la tarea.

# Justificación del Axioma de Independencia

Supongamos que un agente tiene unas preferencias tales que

$$L \succ L_1, \qquad L \succ L_2$$

pero, no verifica el axioma de independencia y, para algún $0 < \alpha < 1$ tenemos que

$$\alpha L_1 + (1-\alpha)L_2 \succ L.$$

En ese caso, podemos hacer lo siguiente:

- Le regalamos la lotería $L$. A continuación y antes de jugar la lotería $L$, le pedimos una cantidad positiva por la posibilidad de intercambiarla por la lotería $\alpha L_1 + (1-\alpha)L_2$. El agente acepta para una cantidad suficientemente pequeña, ya que $\alpha L_1 + (1-\alpha)L_2 \succ L$.
- De la lotería $\alpha L_1 + (1-\alpha)L_2$, el agente obtiene, o bien la lotería $L_1$ o bien la lotería $L_2$. Antes de jugar la lotería obtenida le pedimos una cantidad positiva por la posibilidad de intercambiarla por la lotería $L$. El agente, de nuevo acepta para alguna cantidad, ya que prefiere $L$.

En este momento, el agente ha pagado dos veces y vuelve a estar como al principio, con la lotería $L$.

# Función de Utilidad Esperada (tipo von Neumann-Morgenstern)

## Función de Utilidad Esperada

Una función $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ sobre loterías es una función de utilidad esperada del tipo von Neumann-Morgenstern (v.N-M) si para cada lotería simple $L = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathcal{L}$ existen $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$U(p_1, \ldots, p_n) = v_1 p_1 + v_2 p_2 + \cdots + v_n p_n$$

## Proposición 2.

Una función de utilidad $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ está en forma de utilidad esperada si y sólo si $U\left( \sum_{j=1}^{k} \alpha_j L_j \right) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j U(L_j)$ para todo conjunto de loterías $L_1, \ldots, L_k \in \mathcal{L}$ y números reales $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \geq 0$ tales que $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 1$.

Nota: La demostración es parte de la tarea.

## Proposición 3.

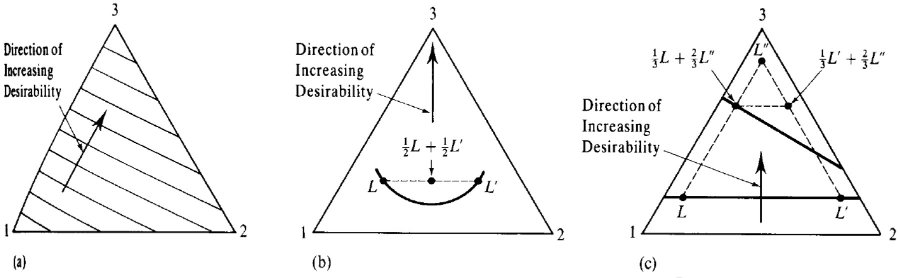
Suponga que $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ es una función de utilidad esperada tipo v.N-M para la relación de preferencias $\succsim$ sobre $\mathcal{L}$. Entonces $\bar{U} : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ es otra función de utilidad esperada tipo v.N-M si y solo si existen escalares $\beta > 0$ y $\gamma$ tal que $\bar{U}(L) = \beta U(L) + \gamma$ para toda $L \in \mathcal{L}$.

# Función de Utilidad Esperada (tipo von Neumann-Morgenstern)

**Teorema de la Utilidad Esperada**

Sea $\succsim$ una relación de preferencias en el espacio de loterías $\mathcal{L}$. Entonces, $\succsim$ admite una representación por una función de utilidad esperada de von Neumann-Morgenstern si y sólo si satisface los axiomas de continuidad e independencia.

Intuición gráfica.




(a) $\succsim$ es representable por una función de utilidad de la forma de utilidad esperada. (b) y (c) muestran contradicción con el axioma de independencia.

# Demostración del Teorema de la Utilidad Esperada

Supogamos que $\succsim$ admite una representación por una función de utilidad

$$U(p_1, \ldots, p_n) = v_1 p_1 + v_2 p_2 + \cdots + v_n p_n$$

y vamos a comprobar [A1] y [A2].

- Axioma de continuidad. Consideramos las loterías

$$L_1 = (p_1, \ldots, p_n), \qquad L_2 = (q_1, \ldots, q_n), \qquad L_3 = (r_1, \ldots, r_n).$$

Entonces,

$$U(\alpha L_1 + (1-\alpha)L_2) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha p_i + (1-\alpha) q_i) v_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} (p_i - q_i) v_i - \sum_{i=1}^{n} q_i v_i$$

$$U(L_3) = \sum_{i=1}^{n} r_i v_i$$

por lo que

$$\begin{aligned}\{\alpha \in [0,1] : \alpha L_1 + (1-\alpha)L_2 \succsim L_3\} =& \{\alpha \in [0,1] : u(\alpha L_1 + (1-\alpha)L_2) \geq u(L_3)\} \\ =& \{\alpha \in [0,1] : \alpha \sum_{i=1}^{n} (p_i - q_i) v_i \geq \sum_{i=1}^{n} (q_i + r_i) v_i\}\end{aligned}$$

que es un intervalo cerrado.

- Axioma de independencia. Consideramos las loterias

$$L_1 = (p_1, \dots, p_n), \qquad L_2 = (q_1, \dots, q_n), \qquad L_3 = (r_1, \dots, r_n).$$

y $0 < \alpha < 1$. Si $L_1 \succsim L_2$, entonces $U(L_1) \geq U(L_2)$ es decir

$$\sum_{i=1}^{n} p_i v_i \geq \sum_{i=1}^{n} q_i v_i$$

por lo que

$$\alpha \sum_{j=1}^{n} p_j v_j + (1-\alpha) \sum_{j=1}^{n} r_j v_j \geq \alpha \sum_{j=1}^{n} q_j v_j + (1-\alpha) \sum_{j=1}^{n} r_j v_j$$

es decir,

$$\alpha L_1 + (1-\alpha) L_3 \succsim \alpha L_2 + (1-\alpha) L_3$$

y recíprocamente, por lo que se verifica el axioma de independencia.

Ahora suponemos que se verifican los axiomas de continuidad e independencia y tenemos que construir una función de utilidad de la forma

$$U(p_1, \ldots, p_n) = v_1 p_1 + v_2 p_2 + \cdots + v_n p_n$$

que representa a las preferencias. Para simplificar la demostración se suele suponer que existen dos loterías $L_0, L_1$ tales que

$$L_1 \succsim L \succsim L_0$$

para toda lotería $L \in \mathcal{L}$. Notemos que si $L_0 \sim L_1$ entonces todas la loterías son indiferentes y es suficiente tomar la función $u(L) = cte$, por lo que podemos suponer que $L_1 \succ L_0$. La demostración es el resultado de la demostración de los siguientes Lemmas:

1. Si $L \succ L'$ y $\alpha \in (0,1)$, entonces $L \succ \alpha L + (1-\alpha)L' \succ L'$.
2. Sean $\alpha, \beta \in [0,1]$. Entonces, $\beta L_1 + (1-\beta)L_0 \succ \alpha L_1 + (1-\alpha)L_0$ si y sólo si $\beta > \alpha$.
3. Para cada $L \in \mathcal{L}$, existe un único $\alpha_L \in [0,1]$ tal que $\alpha_L L_1 + (1-\alpha_L)L_0 \sim L$.
4. Definimos $U : \mathcal{L} \to [0,1]$ como $U(L) = \alpha_L$ donde $\alpha_L L_1 + (1-\alpha_L)L_0 \sim L$. Entonces, $U$ es una representación de $\succsim$.
5. La función de utilidad $U$ es lineal.

# Ejemplo

Supongamos que hay 4 sucesos $\{a, b, c, d\}$ y que $a \succsim b \succsim c \succsim d$. Si las preferencias $\succsim$ del agente verifican los axiomas de continuidad e independencia, entonces podemos encontrar una función de utilidad de la forma

$$U(p_1, p_2, p_3, p_4) = p_1 v_1 + p_2 v_2 + p_3 v_3 + p_4 v_4$$

que representa a las preferencias $\succsim$.

Una forma de determinar una de las funciones $U$ que verifican esto es la siguiente. Definimos $v_1 = 1$, $v_4 = 0$. Para determinar $v_2$ y $v_3$, utilizamos el axioma de continuidad y encontramos $0 \leq \alpha_b$, $\alpha_c \leq 1$ tales que

$$b \sim \alpha_b v_1 + (1 - \alpha_b) v_4 = \alpha_b v_1$$

$$c \sim \alpha_c v_1 + (1 - \alpha_c) v_4 = \alpha_c v_1$$

Elegimos ahora $v_2 = \alpha_b$ y $v_3 = \alpha_c$. La función de utilidad

$$U(p_1, p_2, p_3, p_4) = p_1 + \alpha_b p_2 + \alpha_c p_3$$

representa las preferencias $\succsim$.

# Cuando hay un continuo de posibles estados

Ahora vamos a estudiar una forma de escribir las funciones de utilidad

$$U(p_1, \ldots, p_n) = v_1 p_1 + v_2 p_2 + \cdots + v_n p_n$$

que es al mismo tiempo válida cuando hay un continuo de posibles estados (útil por ejemplo cuando pensamos en resultados monetarios). Dada una lotería $L$ vamos a escribir la función de utilidad anterior como

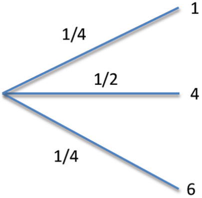
$$U(L) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(x) dF(x)$$

donde $x$ se puede entender como una variable continua que representa cantidad de dinero. Por otra parte, $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ es la función de distribución. Es decir, para todo $x$, $F(x)$ es la probabilidad de que el pago recibido sea mejor o igual a $x$. En este sentido, $F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)$, donde $f$ es la función de densidad asociada.

Note que la final distribución de dinero $F(\cdot)$ inducida por una lotería compuesta $(L_1, \ldots, L_k; \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ es simplemente $F(x) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j F_j(x)$, donde $F_j(\cdot)$ es la distribución de pagos bajo la lotería $L_j$.

$v(x)$ se conoce como función de utilidad de Bernoulli.

# Ejemplo




$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1/4 & 1 \le x < 4 \\ 3/4 & 4 \le x < 6 \\ 1 & x \ge 6 \end{cases}$$

entonces $\int_a^b v(t)dF(t) = v(b)F(b) - v(a)F(a) - \int_a^b v'(t)F(t)dt$.
Supongamos $b > 6$ $a < 1$. Entonces $F(b) = 1$, $F(a) = 0$ por lo que

$$\begin{aligned}
\int_a^b v(t)dF(t) =& v(b) - \int_a^1 v'(t)F(t)dt - \int_1^4 v'(t)F(t)dt - \int_4^6 v'F(t)dt - \int_6^b v'(t)F(t)dt \\
=& v(b) - \frac{1}{4}\int_1^4 v'(t)dt - \frac{3}{4}\int_4^6 v'(t)dt - \int_6^b v'(t)dt \\
=& v(b) - \frac{1}{4}(v(4) - v(1)) - \frac{3}{4}(v(6) - v(4)) - (v(b) - v(6)) \\
=& \frac{1}{4}v(1) + \frac{1}{2}v(4) + \frac{1}{4}v(6) = U(L)
\end{aligned}$$

# Desigualdad de Jensen

## Proposición 4

Supongamos que $F$ es una función de distribución y $v$ es cóncava. Entonces,

$$\int_a^b v(t)dF(t) \leq v\Big(\int_a^b tdF(t)\Big)$$

Recíprocamente, si se verifica que

$$\int_a^b v(t)dF(t) \leq v\Big(\int_a^b tdF(t)\Big)$$

para toda función de distribución $F$ tal que $F(a) = 0$, $F(b) = 1$, entonces $v$ es cóncava en el intervalo $[a, b]$.

Acá se permite que $a = -\infty, b = \infty$.

# Aversión al riesgo

A partir de ahora, supondremos que los agentes tienen preferencias sobre loterías monetarias determinadas la manera siguiente: El agente tiene una función de utilidad creciente $v(t)$, sobre cantidades monetarias $t$. Suponiendo que se verifican las hipótesis del Teorema de la Utilidad Esperada, la función $v$ induce una preferencia sobre loterías,

$$U(F) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) dF(t)$$

donde $F$ es la función de distribución de la lotería. A la función $v(t)$ le llamaremos la función de **utilidad de Bernoulli**. Supondremos que $v$ es creciente y derivable.

## Averso al riesgo

Un agente $v(t)$ es averso al riesgo si

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(t) dF(t) \leq v\left(\int_{-\infty}^{\infty} t dF(t)\right)$$

para todas las loterías $F$.

## El equivalente cierto

Dada una función de Bernouilli $v$ y una lotería $F$, el equivalente cierto, $c(F, v)$, se define por la ecuación

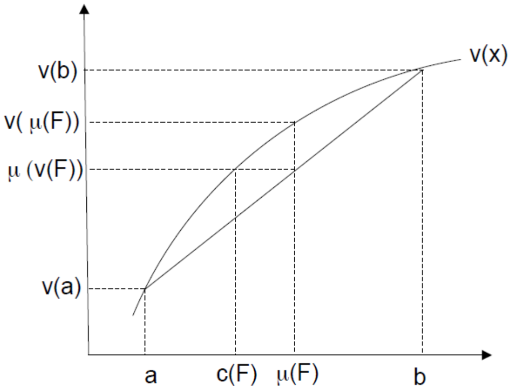
$$v(c(F, v)) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)dF(t)$$

## Proposición 5

Consideremos un agente con función de utilidad de Bernouilli definida por $v(t)$. Entonces, las afirmaciones siguientes son equivalentes:

1. El agente es averso al riesgo.
2. $v(t)$ es cóncava.
3. $c(F, v) \leq \int_{-\infty}^{\infty} tdF(t)$ para toda lotería $F$.

# Demostración de Proposición 5



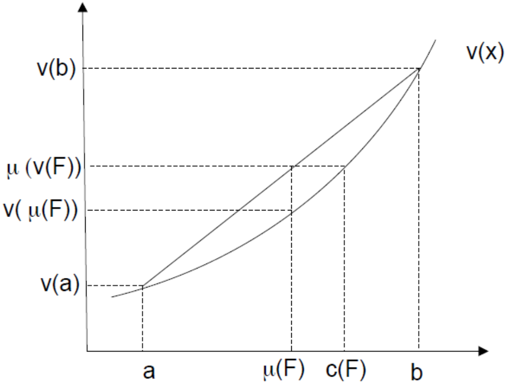

La equivalencia entre (1) y (2) es la Desigualdad de Jensen. Veamos que (1) y (3). Sea $F$ una lotería, entonces $v$ es averso al riesgo $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} v(t)dF(t) \leq v\left(\int_{-\infty}^{\infty} tdF(t)\right) \Leftrightarrow v(c(F,v)) \leq v(\int_{-\infty}^{\infty} tdF(t)) \Leftrightarrow c(F,v) \leq \int_{-\infty}^{\infty} tdF(t)$, ya que $v$ es creciente.

# Definiciones

## Favorable al riesgo

Un agente es favorable al riesgo si para toda lotería $F$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(t)dF(t) \geq v\Big(\int_{-\infty}^{\infty} tdF(t)\Big)$$

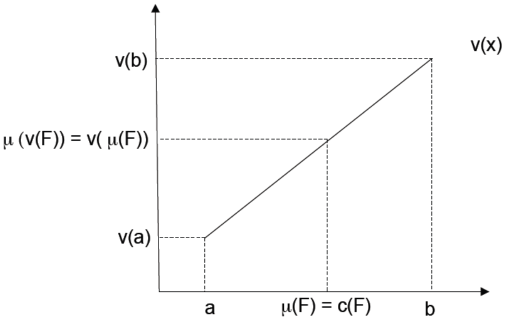


# Definiciones

## Neutral al riesgo

Un agente es neutral al riesgo si para toda lotería $F$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(t)dF(t) = v\left(\int_{-\infty}^{\infty} tdF(t)\right)$$



# Medidas de aversión

## Coeficientes de aversión

Sea un agente con preferencias $v(x)$ sobre cantidades monetarias. Definimos los coeficientes de aversión

1. **absoluta** al riesgo de Arrow-Pratt: $R_A(x) = -\frac{v''(x)}{v'(x)} = R_A(x, u)$.
2. **relativa** al riesgo: $R_r(x) = -x\frac{v''(x)}{v'(x)} = R_r(x, u)$

Observemos que un agente $v(x)$ es:

- averso al riesgo $\Leftrightarrow$ $v$ es cóncava $\Leftrightarrow v'' \leq 0 \Leftrightarrow \forall x, R_A(x) \geq 0$.
- neutral al riesgo $\Leftrightarrow v'' = 0 \Leftrightarrow \forall x, R_A(x) = 0$.
- favorable al riesgo $\Leftrightarrow v'' \geq 0 \Leftrightarrow \forall x, R_A(x) \leq 0$.

# Dominancia estocástica de primer orden

La idea es que $F \succ G \Leftrightarrow$ Dada una cantidad monetaria $x$, la probabilidad de obtener, al menos $x$, es mayor con la lotería $F$ que con la lotería $G$

$\Leftrightarrow$ Dado $x \in \mathbb{R}$, $1 - F(x) \geq 1 - G(x)$

$\Leftrightarrow$ Dado $x \in \mathbb{R}$, $F(x) \leq G(x)$.

Esto motiva la siguiente definición.

## Dominancia estocástica de primer orden

La lotería $F$ domina a la lotería $G$ estocásticamente de primer orden si para cada $x \in \mathbb{R}$, se verifica que $F(x) \leq G(x)$.

## Proposición 5

La lotería $F$ domina a la lotería G estocásticamente de primer orden si y sólo si para toda función $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *creciente* se verifica que

$$\int v(x)dF(x) \geq \int v(x)dG(x)$$

# Dominancia estocástica de segundo orden

La dominancia estocástica de segundo orden se utiliza para comparar el *riesgo* de dos loterías. Para concentrarnos sólo en ese aspecto de las loterías supondremos que todas tienen el mismo valor esperado (ya que un agente puede aceptar un riesgo mayor si el pago esperado es suficientemente grande).

## Dominancia estocástica de segundo orden

Sean $F$ y $G$ dos distribuciones con el mismo valor esperado

$$\int xdF = \int xdG$$

Decimos que F domina a G estocásticamente de segundo orden si para toda función $v$, creciente y cóncava, se verifica que

$$\int v(x)dF(x) \geq \int v(x)dG(x)$$

Es decir $F$ domina a $G$ estocásticamente de segundo orden, si todo agente averso al riesgo y con preferencias monótonas prefiere la lotería $F$ a la lotería $G$.

Presentación basada en Andreu Mas-Colell, Michael D. Whinston y Jerry R. Green. *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, 1995.