IN78O-1 Microeconomía Avanzada (segunda parte)

Profesor: Matteo Triossi Verondini
Auxiliar: María Haydée Fonseca Mairena

Auxiliar N°3

Primavera 2018

Temas a abordar

- Equlibrio General (Mercados Contingentes y Mercados Financieros)

Considere una economía en la cual no hay incertidumbre en $t = 0$ y dos estados de la naturaliza se pueden realizar en el segundo periodo, v y d. Hay una mercancía no almacenable disponible para consumo. Existen dos individuos A y B, caracterizados por

$$u^A(x_0, x_v, x_d) = x_0 + 5x_v - 0{,}3x_v^2 + 5x_d - 0{,}2x_d^2, \qquad \omega^A = (12; 12; 12);$$
$$u^B(x_0, x_v, x_d) = x_0 + 5x_v - 0{,}1x_v^2 + 5x_d - 0{,}2x_d^2, \qquad \omega^B = (12; 12; 12);$$

1. Encuentre el equilibrio de Arrow-Debreu (mercados contingentes).

Respuesta:

Denote por (p_0, p_v, p_d) los precios de las mercancías contingentes. Como las funciones de utilidad son estrictamente crecientes en el consumo inmediato de la mercancía, $p_0 > 0$. En particular, podemos fijar $p_0 = 1$ y asumir que $x_0^i + p_v x_v^i + p_d x_d^i = 12(1 + p_v + p_d)$. Note que, dado $\alpha \in (0, 1)$, $y \to 5y - \alpha y^2$ alcanza un máximo global en $2{,}5/\alpha$. Por lo tanto, si $p_v = 0$ entonces los individuos demandarán $(x_u^A, x_v^B) = (25/3, 25)$, lo cual no es compatible con la oferta de mercado. De forma análoga, si $p_d = 0$ tendremos que $(x_d^A, x_d^B) = (12{,}5; 12{,}5)$ lo cual en el agregado supera la oferta existente. Concluimos que, en equilibrio, todos los precios son estrictamente positivos y la oferta se iguala a la demanda en todos los mercados.

Sean $(1, p_v, p_d) \gg 0$ precios de equilibrio. Vamos a suponer que los agentes demandan cantidades positivas de todas las mercancías. La concavidad de los Langrangeanos nos asegurará que cualquier solución de las condiciones de primer orden que sean compatibles con esta hipótesis será una decisión óptima individual.

Resolviendo para cada individuo, obtenemos que

$$((\bar{p}_0; \bar{p}_v; \bar{p}_d); (\bar{x}_0^A; \bar{x}_v^A; \bar{x}_d^A), (\bar{x}_0^B; \bar{x}_v^B; \bar{x}_d^B) = ((1; 1{,}4; 0{,}2), (20{,}4; 6; 12), (3{,}6; 18; 12))$$

es un equilibrio de Arrow-Debreu.

2. Suponga que la mercancía se transa en mercados a vista en cada periodo. Si los individuos pueden suavizar consumo negociando un activo real libre de riesgo (promete una unidad de la mercancía en cada estado de la naturaleza), cuyo precio es $q > 0$. Encuentre el equilibrio competitivo y determine si genera una distribución de consumo Pareto eficiente.

Respuesta:

La monotonía estricta de las preferencias en el consumo del primer periodo nos asegura que el precio a vista de la mercancía en $t = 0$ sería estrictamente positivo. Por lo tanto, podemos normalizar $p_0 = 1$ y asumir que la restricción presupuestaria del primer periodo se cumple con igualdad: $x_0^i + q\theta^i = 12$, donde q es el precio del activo y θ^i la posición del individuo i.

Argumentos análogos a los desarrollados en el segundo párrafo del ítem previo nos aseguran que los precios a vista p_vy p_d serían estrictamente positivos. Así, podemos normalizarlos, dejando las restricciones presupuestarias en la forma $x_s^i \leq 12 + \theta^i$ con $s \in \{v, d\}$.

No es claro que estas restricciones se cumplan con igualdad. Sin embargo, para cada agente al menos una de ellas lo haría. ¿por qué?

Como el individuo A alcanza su máximo global en el estado v cuando consume $25/3$ unidades de la mercancía, mientras que tiene que consumir $12{,}5$ unidades para alcanzar el máximo global en d, las consideraciones anteriores nos aseguran que A tendrá la restricción presupuestaria del estado d activa en el óptimo, $x_d^A = 12 + \theta^A$. Análogamente, el individuo B tendrá la restricción presupuestaria del estado v activa en el óptimo $x_v^B = 12 + \theta^B$.

Por lo tanto, podemos reescribir los problemas individuales de la forma

$$\max_{x_v^A \leq 12+\theta^A} -q\theta^A + 5x_v^A - 0{,}3(x_v^A)^2 + 5\theta^A - 0{,}2(12+\theta^A)^2;$$

$$\max_{x_d^B \leq 12+\theta^B} -q\theta^B + 5\theta^B - 0{,}1(12+\theta^B)^2 + 5x_d^B - 0{,}2(x_d^B)^2.$$

Sean $(\rho^A, \rho^B) \geq 0$ los multiplicadores asociados a las restricciones individuales, existen cuatro casos relevantes (utilizaremos que en equilibrio $\theta^A = -\theta^B$) :

(i) Si $(\rho^A; \rho^B) \gg 0$, entonces $(x_v^A; x_d^B) = (12+\theta^A; 12-\theta^A)$. Además, $5 - 0{,}6(12+\theta^A) = \rho^A = q - 5 + 0{,}4(12+\theta^A)$. Por lo tanto, $\theta^A = -(q+2)$. Por otro lado, $5 - 0{,}4(12-\theta^A) = \rho^B = q - 5 + 0{,}2(12-\theta^A)$, lo cual implica que $\theta^A = (q-2{,}8)/0{,}6$. Igualando las expresiones que caracterizan a θA obtenemos que $q = 1$. Luego, $\theta^A = -3$ y $x_v^A = 9$, lo cual contradice la optimalidad individual, pues A mejoraría su situación bajando su consumo en v a $25/3$.

(ii) Si $(\rho^A; \rho^B) = 0$, entonces $(x_v^A; x_d^B) = (25/3; 12{,}5)$. Además, $q - 5 + 0{,}4(12+\theta^A) = q - 5 + 0{,}2(12-\theta^A)$. Por lo tanto, $\theta^A = -4$. Luego, como $x_v^B = 12 - \theta^A$, obtenemos que $x_v^A + x_v^B = 25/3 + 16 > 24$, lo cual es incompatible con equilibrio.

(iii) Si $\rho^A = 0$ y $\rho^B > 0$, entonces $(x_v^A; x_d^B) = (25/3; 12-\theta^A)$. Además, $q - 5 + 0{,}4(12+\theta^A) = 0$ y $5 - 0{,}4(12-\theta^A) = q - 5 + 0{,}2(12-\theta^A)$. Así $0{,}2 - 0{,}4\theta^A = q = 2{,}8 + 0{,}6\theta^A$. Por lo tanto, $\theta^A = -2{,}6$. Esto implica que $x_d^B = 14{,}6$ lo cual es incompatible con la optimalidad individual, pues B podría aumentar su utilidad disminuyendo ese consumo a $12{,}5$.

(iv) Si $\rho^A > 0$ y $\rho^B = 0$, entonces $(x_v^A; x_d^B) = (12+\theta^A; 12{,}5)$. Además $5 - 0{,}6(12+\theta^A) = q - 5 + 0{,}4(12+\theta^A)$ y $q = 2{,}6 + 0{,}2\theta^A$. Por lo tanto, $\theta^A = -23/6$ y $q = 11/6$. Concluimos que

$$(q; \theta^A; \theta^B; x_0^A; x_0^B; x_v^A; x_d^A; x_v^B; x_d^B) = (11/6; -23/6; 23/6; 685/36; 179/36; 49/6; 49/6; 95/6; 12{,}5)$$

es un equilibrio competitivo de la economía con mercados incompletos.

La distribución de recursos implementada en equilibrio es Pareto ineficiente, pues las tasas marginales de sustitución entre consumo en $t = 0$ y consumo en $s = d$ no coinciden entre los individuos (solamente son iguales cuando ambos consumen lo mismo en d).

3. En el contexto del ítem anterior, suponga que se agrega un activo al mercado: un seguro que, a cambio de una prima q en el primer periodo, promete la entrega de una unidad de la mercancía si el estado de la naturaleza u se realiza en $t = 1$. Determine el equilibrio competitivo en este escenario y analice la Pareto eficiencia de la distribución de consumo generada.

Respuesta:

Argumentos idénticos a los hechos al inicio de la solución del ítem previo aseguran que el precio de la mercancía será estrictamente positivo en todos los mercados a vista. Por lo tanto, lo podemos normalizar escogiendo $(\bar{p}_0; \bar{p}_v; \bar{p}_d) = (1; 1; 1)$. Como hay dos activos no redundantes, el mercado sería completo. Así, las demandas por conusmo coincidirán con aquellas que se implementan en el equilibrio de Arrow-Debreu: $(\bar{x}_0^A; \bar{x}_v^A; \bar{x}_d^A); (\bar{x}_0^B; \bar{x}_v^B; \bar{x}_d^B) = (20{,}4; 6; 12), (3{,}6; 18; 12))$

Además, la ausencia de oportunidades de arbitraje asegurará que el precio de equilibrio del activo libre de riesgo será $q = \lambda_v + \lambda_d$ y el precio del seguro $\pi = \lambda_v$ donde $(1; \lambda_v; \lambda_d)$ es el precio de equilibrio de Arrow-Debreu. Esto es, $\lambda_v = 1{,}4$ y $\lambda = 0{,}2$. Concluimos que los precios de equilibrio de los activos son $(q, \pi) = (1{,}6; 1{,}4)$.

Evidentemente la distribución de recursos implementada es Pareto eficiente, pues es la misma que se obtendrá en mercados contingentes.

Referencias

- Ejercicio 2: Pauta Solemne I, *Microeconomía II*, profesor Juan Pablo Torres-Martínez (2015). Universidad de Chile.