IN78O-1 Microeconomía Avanzada (segunda parte)

Profesor: Matteo Triossi Verondini
Auxiliar: María Haydée Fonseca Mairena

Auxiliar N°2

Primavera 2018

Temas a abordar

- Equlibrio General (en Economía de Intercambio)
  (i) Asignaciones justas (eficientes y libres de envidia).
  (ii) Curva de contrato y caja de Edgeworth.
- Equlibrio General (en Economía con Producción)
  (i) Definición de equilibrio.
  (ii) Economía tipo Robinson.

Ejercicio 1

Considere una economía de intercambio estática con N consumidores y L mercancías, donde la oferta agregada de recursos es $W \in \mathbb{R}^L_{++}$. Cada individuo $i \in \{1, \ldots, N\}$ tiene una función de utilidad $u^i : \mathbb{R}^L_+ \to \mathbb{R}$ continua, estrictamente creciente y estrictamente cuasi-cóncava. Diremos que una distribución de recursos $(x^i)_{i\in\{1,\ldots,N\}}$ es *libre de envidia* si $u^i(x^i) \geq u^i(x^j)$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, N\}$. Una asignación factible es *justa* si es Pareto eficiente y libre de envidia.

1. De un ejemplo de una economía donde las distribuciones de recursos que se obtienen en un equilibrio competitivo no son justas.

Respuesta:
$N = 2$, $u^1(x, y) = u^2(x, y) = \sqrt{xy}$ y $W = w^1 + w^2 = (10, 10) + (1, 1)$, entonces en el único equilibrio Walrasiano los agentes demandan sus asignaciones iniciales y el individuo $i = 2$ envidia la situación del individuo $j = 1$, pues $u^i(\bar{x}^j) = \sqrt{100} > \sqrt{1} = u^i(\bar{x}^i)$.

2. Demuestre que siempre existen distribuciones de recursos justas.

Respuesta:
Considere el siguiente problema de maximización del bienestar social, en el cual un planificador central se preocupa del individuo que está en la peor situación en términos de utilidad:

$$\max_{(x^1,\ldots,x^n)\in\mathbb{R}^{LN}_+ : \sum_{i=1}^N x^i \leq W} \min\{u^1(x^1), \ldots, u^N(x^N)\}$$

Sigue del Teorema de Weierstrass que existe una solución para el problema anterior. Además, en toda solución $(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^N)$ tenemos que $u^i(\bar{x}^i) = u^j(\bar{x}^j)$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, N\}$.

Ejercicio 2

Considere una economía de intercambio $E = \{I, (u_i, \omega_i)_{i\in I}\}$ con $I = \{1, 2\}$, cuyas funciones de utilidad son $u_i(x_{1i}, x_{2i}) = x_{1i}x_{2i}$ y sus dotaciones iniciales están dadas por $\omega_1 = (1, 3)$ y $\omega_2 = (3, 1)$.

1. Muestre que cualquier vector de precios $p = (p_1, p_2)$ donde $p_1 = p_2$ junto con las asignaciones $(x_1; x_2)$ donde $x_1 = x_2$, es un equilibrio.

Respuesta:

Defina $q = p_1 = p_2$, luego $p = (q, q)$. La riqueza del agente 1 es $4q$ y su demanda $D_1(p)$ es

$$\underset{(x_{11},x_{21})}{\text{arg max}}\ x_{11}x_{21} \qquad \text{s.a: } (x_{11} + x_{21})q \leq 4q$$

Resolviendo nos queda: $x_{11} = x_{21} = \frac{q+3q}{2q}$, luego problema de maximización tiene una única solución $(2, 2)$. Por simetría $D_2(p) = (2, 2)$. Además, verificamos que a precios p los mercados se vacían. Por tanto, $\{(q, q), x_1 = (2, 2), x_2 = (2, 2)\}$ es un equilibrio.

2. ¿Hay algún otro equilibrio?

Respuesta:

Dado $p = (p_1, p_2)$, la riqueza del agente 1 es $p_1 + 3p_2$ y su demanda $D_1(p)$ es

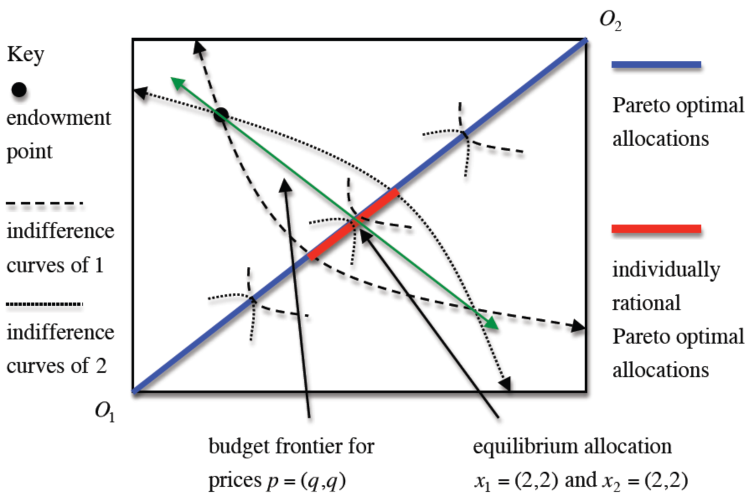
$$\underset{(x_{11},x_{21})}{\text{arg max}}\ x_{11}x_{21} \qquad \text{s.a: } (x_{11} + x_{21})q \leq p_1 + 3p_2$$

Resolviendo se demuestra que no existe otro equilibrio.

3. Dibuje la caja de Edgeworth para esta economía indicando el conjunto de asignaciones Pareto-óptimas. También indique cuáles de estas asignaciones son tanto Pareo-óptimas como individualmente racionales para ambos agentes. Encuentre e indique la asignación de equilibrio considerando p_2 como numerario.

Respuesta:

Considerando $p_2 = 1$ y usando la ecuación final del item anterior obtenemos que el Equilibrio Walrasiano es $EW = \{p = (1, 1), x_1 = (2, 2,), x_2 = (2, 2)\}$.



4. Encuentre una expresión analítica para el conjunto de asignaciones Pareto-óptimas y la curva de contrato.

Respuesta:

Las asignaciones Pareto-óptimas son

$$\{\{x_1 = (s, s), x_2 = (4 - s, 4 - s)\}|s \in [0, 4]\}$$

La individualidad racional requiere que $s^2 \geq 3 = U_1(\omega_1)$ y $(4 - s)^2 \geq 3 = U_2(\omega_2)$. Por tanto las asignaciones Pareto-óptimas e individualmente racionales (es decir, las que se encuentran en la curva de contratio) son:

$$\{\{x_1 = (s, s), x_2 = (4 - s, 4 - s)\}|s \in [\sqrt{3}, 4 - \sqrt{3}]\}$$

5. Suponga que mantenemos todo excepto la función de utilidad de los agentes. Ahora es $u_i(x_{1i}, x_{2i}) = \min\{x_{1i}; x_{2i}\}$. Dibuje la caja de Edgeworth para esta economía. ¿Cuál es el conjunto de equilibrio ahora?

Respuesta:

Dados los precios $p = (p_1, p_2)$, primero asumamos que $p_1, p_2 \neq 0$. La riqueza del agente 1 es $p_1 + 3p_2$ y su función de demanda $D_1(p)$ es

$$\underset{(x_{11},x_{21})}{\text{argmax}} \min\{x_{11}, x_{21}\}, \qquad \text{s.a: } p_1x_{11} + p_2x_{21} \leq p_1 + 3p_2.$$

Dado que más de un bien que el otro no proporciona utilidad adicional pero cuesta algo, una condición necesaria para el comportamiento de maximización de la utilidad es que $x_{11} = x_{21}$. Sustituyendo esta condición en la restricción presupuestaria tenemos:

$$D_1(p) = \left(\frac{p_1 + 3p_2}{p_1 + p_2}, \frac{p_1 + 3p_2}{p_1 + p_2}\right).$$

Similarmente para el agente 2, obtenemos:

$$D_2(p) = \left(\frac{3p_1 + p_2}{p_1 + p_2}, \frac{3p_1 + p_2}{p_1 + p_2}\right).$$

Y la función de exceso de demanda es:

$$E(p) = \left(\frac{4p_1 + 4p_2}{p_1 + p_2} - 4, \frac{4p_1 + 4p_2}{p_1 + p_2} - 4\right) = 0$$

Entonces, encontramos un equilibrio.

Ahora asumamos que el vector de precios es $(p_1, 0)$. Luego, la frontera de la restricción presupuestaria del agente 1 es una linea vertical sobre ω_1 y por lo tanto su correspondencia de demanda es

$$D_1(p) = \{(1, x_{21})|x_{21} \geq 1\}$$

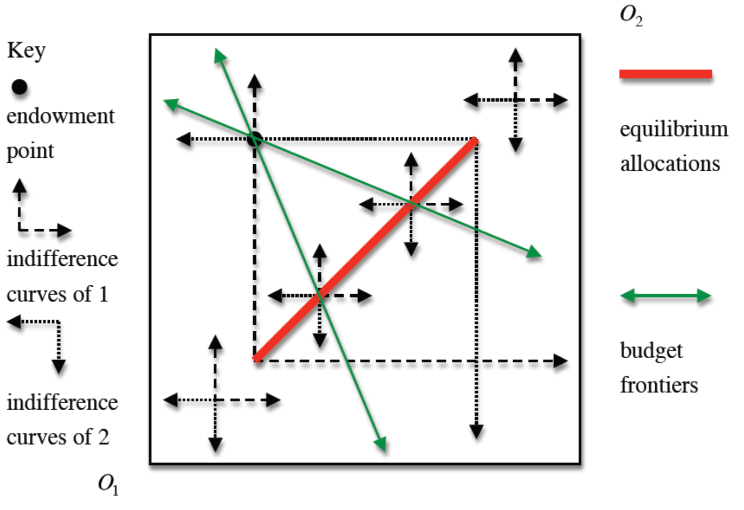
y

$$D_1(p) = \{(3, x_{22})|x_{22} \geq 3\}$$

Dado que la dotación social es $(4, 4)$, uno puede ver que la única forma de que el exceso de demanda sea 0 es si $x_{21} = 1$ y $x_{22} = 3$. Podemos hacer un análisis similar para el vector de precios $(0, p_2)$.

Por tanto, a partir de los resultados anteriores, podemos expresar el conjunto de equilibrios como sigue:

$$\left\{\{(p_1, p_2), x_1 = (\frac{p_1 + 3p_2}{p_1 + p_2}, \frac{p_1 + 3p_2}{p_1 + p_2}), x_2 = (\frac{3p_1 + p_2}{p_1 + p_2}, \frac{3p_1 + p_2}{p_1 + p_2})\}|p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2_+\right\}$$



6. Siguiendo el inciso anterior, suponga ahora que también cambia la dotación inicial del agente 2, pasando de $\omega_2 = (3, 1)$ a $\omega_2 = (4, 1)$. ¿Cuál es el equilibrio ahora? Dibuje.

Respuesta:

Procedemos similar al inciso anterior. Primero asumimos que $p_1, p_2 \neq 0$. Entonces

$$D_1(p) = \left(\frac{p_1 + 3p_2}{p_1 + p_2}, \frac{p_1 + 3p_2}{p_1 + p_2}\right).$$

$$D_2(p) = \left(\frac{4p_1 + p_2}{p_1 + p_2}, \frac{4p_1 + p_2}{p_1 + p_2}\right).$$

Y la función de exceso de demanda es:

$$E(p) = \left(\frac{5p_1 + 4p_2}{p_1 + p_2} - 5, \frac{5p_1 + 4p_2}{p_1 + p_2} - 4\right) = \left(\frac{-p_2}{p_1 + p_2}, \frac{p_1}{p_1 + p_2}\right) \neq 0$$

Entonces este no puede ser un equilibrio. Por tanto, en caso de existir equilibrio debe ocurrir que al menos uno de los precios sea cero.

Primero supongamos que el biene escaso es gratis, es decir $p_2 = 0$.

$$D_1(p) = \{(1, x_{21}) | x_{21} \geq 1\}$$

y

$$D_2(p) = \{(4, x_{21}) | x_{21} \geq 4\}$$

Note que no hay forma de que $x_{21} + x_{22} \leq 4$, por tanto el mercado del bien 2 no se vacía (existe exceso de demanda). Concluimos que este vector de precios no es de equilibrio.

Ahora supongamos que el bien más abundante es el gratis, es decir $p_1 = 0$. En este caso,

$$D_1(p) = \{(x_{11}, 3) | x_{11} \geq 3\}$$

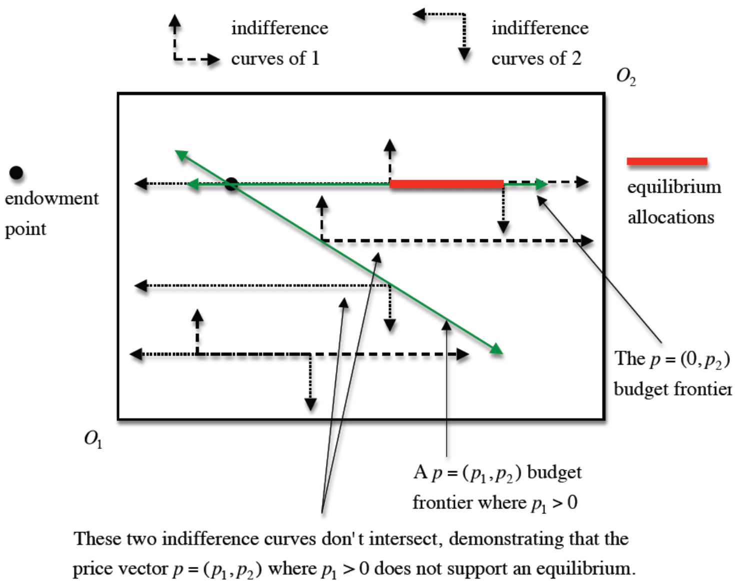
y

$$D_2(p) = \{(x_{12}, 1) | x_{12} \geq 1\}$$

Dado que es posible que $x_{11} + x_{12} \leq 5$, entonces el conjunto de equilibrio es:

$$\Big\{\{(0,p_2), x_1 = (3+r,3), x_2 = (2-r,1)\}|r \in [0,1]\Big\}$$

Normalizando, a diferencia con el inciso anterior hay ahora un precio de equilibrio único $p = (0,1) \in \Delta$.



Ejercicio 3

Cada consumidor $i = 1, \ldots, I$ tiene preferencias representables por las funciones de utilidad $u^1, \ldots, u^I$. Además existen K firmas, $k \in \mathcal{K}$, los conjuntos de producción $Y^k \in \mathbb{R}^N$. Cada Y^k es un conjunto de planes de producción: si $y \in Y^k$, entonces $y_l < 0$ significa que el bien l es usado como input; $y_l > 0$ significa que el bien l es un output. Las firmas pertenecen a los hogares. Denotaremos α^{ki} la partición (share) que el agente i tiene de la firma k. Una economía con produción es entonces:

$$\mathcal{E} = ((u^i, e^i, (\alpha^{ki}_{k\in\mathcal{K}})_{i\in\mathcal{I}}, (Y^k)_{k\in\mathcal{K}})$$

Defina formalmente el equilibrio Walrasiano de esta economía.

Respuesta:

Un equilibrio Walrasiano es un vector $(p, (x^i)_{i\in\mathcal{I}}, (y^k)_{k\in\mathcal{K}})$ tal que

1. Las firmas maximizan sus beneficios:

$$\forall k \in \mathcal{K}, \qquad y^k \in \arg\max_{y\in Y^k} p \cdot y$$

2. Los consumidores maximizan su utilidad:

$$\forall i \in \mathcal{I}, \qquad x^i \in \arg\max_{x} u^i(x)$$

$$\text{s.a: } p \cdot x \leq p \cdot \big(e^i \sum_{k\in\mathcal{K}} \alpha^{ki} y^k\big)$$

3. Los mercados se vacían:

$$\forall l \in \mathcal{L}, \qquad \sum_{i\in\mathcal{I}} x^i_l = \sum_{k\in\mathcal{K}} y^k_l + \sum_{i\in\mathcal{I}} e^i_l$$

Ejercicio 4

Robinson es el único dueño de una firma que utiliza trabajo, L, para producir dos bienes (X, Y) de acuerdo a las siguientes funciones de producción.

$$X = \sqrt{L_x}$$

$$Y = \frac{\sqrt{L_y}}{2}$$

Por otra parte, las preferencias de Robinson pueden ser representadas por: $U(X, Y) = \sqrt{XY}$ Además considere que Robinson cuenta con una dotación de trabajo de $\bar{L}$ horas.

1. Defina un equilibrio competitivo para esta economía.

Respuesta:

Un equilibrio competitivo para esta economía es un vector de precios (p_x, p_y, ω) y una asignación de recursos (X^c, Y^c, L^c) y (X^f, Y^f, L_x^f, L_y^f) tal que:

a) (X^f, Y^f, L_x^f, L_y^f) maximiza los profits de la firma dada su tecnología y los precios.

b) (X^c, Y^c, L^c) maximiza la utilidad de Robinson, $U(X^c, Y^c) = \sqrt{X^c Y^c}$ dada su restricción presupuestaria $\pi^f + \omega L^c = p_x X^c + p_y Y^c$.

c) La asignación de recursos (X^c, Y^c, L^c) y (X^f, Y^f, L_x^f, L_y^f) es factible, esto es, $L^c = L_x^f + L_y^f < \bar{L}$ y $X^c = X^f$, $Y^f = Y^c$.

2. Encuentre el equilibrio competitivo.

Respuesta:

La firma maximiza profits:

$$\text{Max}\Pi = p_x\sqrt{L_x} + p_y\frac{\sqrt{L_y}}{2} - \omega(L_x + L_y)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial L_x} = \frac{p_x}{2}L_x^{-0,5} - \omega = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial L_y} = \frac{p_y}{4}L_y^{-0,5} - \omega = 0$$

$$L_y^f = \left(\frac{p_y}{4\omega}\right)^2 \qquad L_x^f = \left(\frac{p_x}{2\omega}\right)^2$$

$$X^f = \frac{p_x}{2\omega} \qquad Y^f = \frac{p_y}{8\omega}$$

$$\pi^f = \frac{4p_x^2 + p_y^2}{16\omega}$$

El consumidor maximiza utilidad sujeto a su restricción presupuestaria. Es directo ver que para cualquier salario positivo el consumidor ofrecerá todo su trabajo ya que no recibe utilidad del ocio. Luego resuelve:

$$\text{Max } U : \sqrt{X^c Y^c}, \qquad \text{s.a: } \pi^f + \omega\bar{L} = p_x X^c + p_y Y^c.$$

$$\text{Max } \mathcal{L} = \sqrt{X^c Y^c} + \lambda(\pi^f + \omega \bar{L} - p_x X^c - p_y Y^c)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^c} = \frac{\sqrt{Y^c}}{2\sqrt{X^c}} - \lambda p_x = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y^c} = \frac{\sqrt{X^c}}{2\sqrt{Y^c}} - \lambda p_y = 0$$

Reemplazando en su restricción presupuestaria obtenemos:

$$X^c = \frac{\pi^f + \omega \bar{L}}{2p_x}, \qquad Y^c = \frac{\pi^f + \omega \bar{L}}{2p_y}$$

Los mercados se aclaran:

$$X^c = X^f \implies \frac{\frac{4p_x^2 + p_y^2}{16\omega} + \omega \bar{L}}{2p_x} = \frac{p_x}{2\omega} \tag{1}$$

$$Y^c = Y^f \implies \frac{\frac{4p_x^2 + p_y^2}{16\omega} + \omega \bar{L}}{2p_x} = \frac{p_x}{8\omega} \tag{2}$$

$$\bar{L} = L_x^f + L_y^f \implies \bar{L} = \left(\frac{p_y}{4\omega}\right)^2 + \left(\frac{p_x}{2\omega}\right)^2 \tag{3}$$

Dividiendo (1) entre (2): $\frac{p_y}{p_x} = 2$. Luego usando (3) tenemos $16\omega^2 \bar{L} = p_y^2 + 4p_x^2$, $\frac{16\omega^2 \bar{L}}{p_y^2} = 1 + 4\frac{p_x^2}{p_y^2} = 2$. Luego $\frac{\omega^2}{p_y^2} = \frac{1}{8L}$. Reemplazando los precios obtenemos finalmente el equilibrio Walrasiano:

$$X^c = X^f = \frac{\sqrt{\bar{L}}}{\sqrt{2}}, \qquad Y^c = Y^f = \frac{\sqrt{\bar{L}}}{\sqrt{8}}$$

$$L_x^f = \frac{\bar{L}}{2}, \qquad L_y^f = \frac{\bar{L}}{2}$$

$$\frac{p_y}{p_x} = 2, \qquad \frac{p_y}{\omega} = \sqrt{8\bar{L}}$$

Referencias

- Ejercicio 1. Pauta Solemne 1 de la clase de *Microeconomía II* (2018). Profesor Juan Pablo Torres-Martínez. Universidad de Chile.

- Ejercicios 2. Pauta de Exercise Sheet I. *Microeconomía II* (2015). Universidad Autónoma de Barcelona, IDEA Graduate Program.

- Ejercicios 3. Apunte *General Equilibium* de Jonathan Levin (2006).

- Ejercicio 4. Prueba 1 de la clase de *Teoría Microeconómica I* (2006). Profesor José Miguel Sánchez. Pontífica Universidad Católica de Chile.