

IN3701 - Modelamiento y Optimización

Pauta Auxiliar 06 - Dualidad

Profesores: Fernando Ordóñez, Andreas Wiese

Auxiliares: Cristian Aguayo, Javier Cembrano, Azucena Orellana, Macarena Osorio

Pregunta 1

1. Escriba el problema dual del siguiente PPL:

$$\begin{array}{llllllll}
 \min & x_1 & - & x_2 & & & & \\
 \text{s.t.} & 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & x_4 \leq 0 \\
 & 3x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 \geq 3 \\
 & -x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 = 6 \\
 & x_1 & & & & & & \leq 0 \\
 & & & x_2 & & & & \geq 0 \\
 & & & & & x_3 & & \geq 0
 \end{array}$$

2. Sea A una matriz simétrica cuadrada. Considere el siguiente PPL:

$$\begin{aligned}
 (P) \quad & \min c^t x \\
 & Ax \geq c \\
 & x \geq 0
 \end{aligned}$$

Pruebe que si \bar{x} satisface $A\bar{x} = c$ y $\bar{x} \geq 0$, entonces \bar{x} es solución óptima.

Solución:

- 1.

$$\begin{array}{llllllll}
 \max & 0p_1 & + & 3p_2 & + & 6p_3 & & \\
 \text{s.t.} & 2p_1 & + & 3p_2 & - & p_3 & \geq & 1 \\
 & 3p_1 & + & p_2 & - & p_3 & \leq & -1 \\
 & -p_1 & + & 4p_2 & + & 2p_3 & \leq & 0 \\
 & p_1 & + & p_2 & + & p_3 & = & 0 \\
 & p_1 & & & & & \leq & 0 \\
 & & & p_2 & & & \geq & 0
 \end{array}$$

2. El dual de (P) es:

$$\begin{aligned}
 (D) \quad & \max c^t y \\
 & A^t y \leq c \\
 & y \geq 0
 \end{aligned}$$

Que por simetría de A es igual a:

$$\begin{aligned}
 (D) \quad & \max c^t y \\
 & Ay \leq c \\
 & y \geq 0
 \end{aligned}$$

Por dualidad débil, se tiene entonces que:

$$c^t x \geq c^t y \quad \forall x \in (P), y \in (D)$$

De la definición de \bar{x} , este vector es solución factible tanto para el primal como para el dual. De esto último, podemos reemplazar y por \bar{x} en la expresión anterior, obteniéndose:

$$c^t x \geq c^t \bar{x} \quad \forall x \in (P)$$

Lo cual, sumado a la factibilidad primal de \bar{x} , es justamente la definición de un óptimo de (P).

Pregunta 2

Considere un problema lineal en forma estándar que es infactible, pero se hace factible y tiene solución óptima finita si se omite la última restricción de igualdad. Muestre que el dual del problema original (infactible) es factible y es no acotado.

Solución:

Llamaremos (P) el problema original en forma estándar:

$$\begin{aligned} (P) \quad & \min c^t x \\ & Ax = b \\ & a_{m+1}x = b_{m+1} \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Donde A es una matriz de $m \times n$ y a_{m+1} un vector fila de $1 \times n$
Sea (P1) el problema (P) sin la última restricción:

$$\begin{aligned} (P1) \quad & \min c^t x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Como (P1) tiene solución óptima finita, entonces por el teorema de dualidad fuerte, su dual también la tiene. Llamaremos (D1) a su dual:

$$\begin{aligned} (D1) \quad & \max b^t y \\ & A^t y \leq c \end{aligned}$$

Sea y^* la solución óptima de (D1), luego se debe satisfacer : $A^t y^* \leq c$. Si llamamos (D) al problema dual de (P):

$$\begin{aligned} (D) \quad & \max b^t y + b_{m+1} y_{m+1} \\ & A^t y + a_{m+1}^t y_{m+1} \leq c \end{aligned}$$

Se tiene la solución factible trivial : $y = y^*, y_{m+1} = 0$, es decir $\bar{y} = (y^*, 0)$ es factible en (D)
 Luego, como (P) no es factible, por el teorema de dualidad fuerte (D) solo puede ser infactible o no acotado.
 Pero como \bar{y} es una solución factible, se concluye que (D) es un problema no acotado.

Pregunta 3 (P1.2 Control 2, 2017-2)

Dado el problema lineal

$$P(b, c) = \begin{array}{ll} \min & c^\top x \\ \text{s.a.} & Ax = b, \ x \geq 0 \end{array}$$

1. Si x^* es el óptimo de $P(b, c^*)$ y \bar{x} es óptimo de $P(b, \bar{c})$ muestre que $(\bar{c} - c^*)^\top (\bar{x} - x^*) \leq 0$
2. Si adicionalmente p^* es el óptimo dual de $P(b, c^*)$ y \hat{x} es el óptimo de $P(\hat{b}, c^*)$ muestre que $(p^*)^\top (\hat{b} - b) \leq (c^*)^\top (\hat{x} - x^*)$.

Solución:

1. Dado que solo cambia la función objetivo, se tiene que \bar{x} es solución factible de $P(b, c^*)$, ya que satisface las restricciones. Luego, como x^* es óptimo de $P(b, c^*)$, satisface que $(c^*)^\top x^* \leq (c^*)^\top \bar{x}$, o equivalentemente, $(c^*)^\top x^* - (c^*)^\top \bar{x} \leq 0$. Análogamente, x^* es factible para $P(b, \bar{c})$. Como \bar{x} es óptimo, satisface que $\bar{c}^\top \bar{x} - \bar{c}^\top x^* \leq 0$. Sumando ambas desigualdades y factorizando, se obtiene lo pedido.
2. Usando la misma notación de antes, definimos:

$$D(b, c) = \begin{array}{ll} \max & y^\top b \\ \text{s.a.} & y^\top A \leq c, \ y \text{ libre} \end{array}$$

Sea p^* óptimo de $D(b, c^*)$. Por dualidad fuerte, tenemos que $(p^*)^\top b = (c^*)^\top x^*$. Por otro lado, (p^*) es solución factible de $D(\hat{b}, c^*)$ ya que satisface las restricciones, y por dualidad débil, $(p^*)^\top \hat{b} \leq (c^*)^\top \hat{x}$. Multiplicando la igualdad por -1 y sumando $(p^*)^\top \hat{b}$ en ambos lados:

$$(p^*)^\top (\hat{b} - b) = (p^*)^\top \hat{b} - (c^*)^\top x^* \leq (c^*)^\top (\hat{x} - x^*)$$

Concluyendo que:

$$(p^*)^\top (\hat{b} - b) \leq (c^*)^\top (\hat{x} - x^*)$$