

IN3701 - Modelamiento y Optimización

Auxiliar 06 - Dualidad

Profesores: Fernando Ordóñez, Andreas Wiese

Auxiliares: Cristian Aguayo, Javier Cembrano, Azucena Orellana, Macarena Osorio

Pregunta 1

1. Escriba el problema dual del siguiente PPL:

$$\begin{array}{llllllll}
 \min & x_1 & - & x_2 & & & & \\
 \text{s.t.} & 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & x_4 \leq 0 \\
 & 3x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 \geq 3 \\
 & -x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 = 6 \\
 & x_1 & & & & & & \leq 0 \\
 & & & x_2 & & & & \geq 0 \\
 & & & & & x_3 & & \geq 0
 \end{array}$$

2. Sea A una matriz simétrica cuadrada. Considere el siguiente PPL:

$$\begin{array}{ll}
 (P) & \min c^T x \\
 & Ax \geq c \\
 & x \geq 0
 \end{array}$$

Pruebe que si \bar{x} satisface $A\bar{x} = c$ y $\bar{x} \geq 0$, entonces \bar{x} es solución óptima.

Pregunta 2

Considere un problema lineal en forma estándar que es infactible, pero se hace factible y tiene solución óptima finita si se omite la última restricción de igualdad. Muestre que el dual del problema original (infactible) es factible y es no acotado.

Pregunta 3 (P1.2 Control 2, 2017-2)

Dado el problema lineal

$$\begin{array}{ll}
 P(b, c) = & \min c^T x \\
 \text{s.a.} & Ax = b, x \geq 0
 \end{array}$$

1. Si x^* es el óptimo de $P(b, c^*)$ y \bar{x} es óptimo de $P(b, \bar{c})$ muestre que $(\bar{c} - c^*)^T (\bar{x} - x^*) \leq 0$
2. Si adicionalmente p^* es el óptimo dual de $P(b, c^*)$ y \hat{x} es el óptimo de $P(\hat{b}, c^*)$ muestre que $(p^*)^T (\hat{b} - b) \leq (c^*)^T (\hat{x} - x^*)$.

Anexos:

- El problema dual: Sea \mathbf{A} una matriz de filas \mathbf{a}'_i y columnas \mathbf{A}_j . Dado un *problema primal* de minimización (P), su *problema dual* consiste en un problema de maximización (D):

(P) mín $\mathbf{c}'\mathbf{x}$ s.a: $\mathbf{a}'_i\mathbf{x} \geq b_i \quad i \in M_1$ $\mathbf{a}'_i\mathbf{x} \leq b_i \quad i \in M_2$ $\mathbf{a}'_i\mathbf{x} = b_i \quad i \in M_3$ $x_j \geq 0 \quad j \in N_1$ $x_j \leq 0 \quad j \in N_2$ $x_j \in \mathbb{R} \quad j \in N_3$	(D) máx $\mathbf{y}'\mathbf{b}$ s.a: $y_i \geq 0 \quad i \in M_1$ $y_i \leq 0 \quad i \in M_2$ $y_i \in \mathbb{R} \quad i \in M_3$ $\mathbf{y}^t\mathbf{A}_j \leq c_j \quad j \in N_1$ $\mathbf{y}^t\mathbf{A}_j \geq c_j \quad j \in N_2$ $\mathbf{y}^t\mathbf{A}_j = c_j \quad j \in N_3$
---	--

Notar que por cada restricción en el primal (sin contar las de signo), se introduce una variable en el problema dual; por cada variable en el primal, se introduce una restricción en el dual. En resumen:

PRIMAL	Minimizar	Maximizar	DUAL
Restricciones	$\geq b_i$	≥ 0	Variables
	$\leq b_i$	≤ 0	
	$= b_i$	Irrestringido	
Variables	≥ 0	$\leq c_j$	Restricciones
	≤ 0	$\geq c_j$	
	Irrestringido	$= c_j$	

Nota: Si se parte con un problema de maximización se puede convertir a uno de minimización equivalente y luego formar su dual de acuerdo a las reglas descritas en la tabla.

- Las diferentes posibilidades para el problema primal y dual:

	Óptimo Finito	No Acotado	Infactible
Óptimo Finito	Posible	Imposible	Imposible
No Acotado	Imposible	Imposible	Posible
Infactible	Imposible	Posible	Posible

- Teorema de Dualidad Débil :** Si x es una solución factible del problema primal y p es una solución factible del problema dual, entonces

$$p^T b \leq c^T x$$

- Teorema de Dualidad Fuerte :** Si un problema de programación lineal tiene solución óptima, el Dual también tiene, y los respectivos costos óptimos son iguales.