IN2201 - Economía
Profesor: Stefano Banfi
Profesores auxiliares: Tomás Arce, Ronald Leblebici

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Clase auxiliar # 4

1. Comente's y preguntas cortas sobre demanda

1. Señale cuáles son las propiedades de las curvas de indiferencia que sustentan el Principio de Elección Racional.

   Respuesta: El marco de referencia para representar un comportamiento racional de los consumidores se define a partir de un conjunto de Axiomas respecto a las preferencias de éstos. Las preferencias son: (i) Completas*; (ii) Transitivas; (iii) Continuas. Además, se consideran los siguientes supuestos respecto a las preferencias: (a) Monótonas; (b) Convexas. A partir de estos Axiomas y Supuestos se pueden inferir las siguientes características de las curvas de indiferencia (recuerden que todas las canastas de bienes pertenecientes a la misma curva de indiferencia entregan la misma utilidad a los consumidores):

   - La pendiente de la curva de indiferencia, es decir, la tasa marginal de sustitución (TMS o RMS), es siempre negativa – Supuesto de Monotonía.
   - Toda canasta que se encuentre hacia la derecha y arriba de una curva de indiferencia es preferida a cualquier canasta perteneciente a la curva de indiferencia – Supuesto de Monotonía.
   - Las curvas de indiferencia no pueden cortarse – Axioma de Transitividad y Supuesto de Monotonía.
   - Las curvas de indiferencia tienen una TMS decreciente – Supuesto de Convexidad.

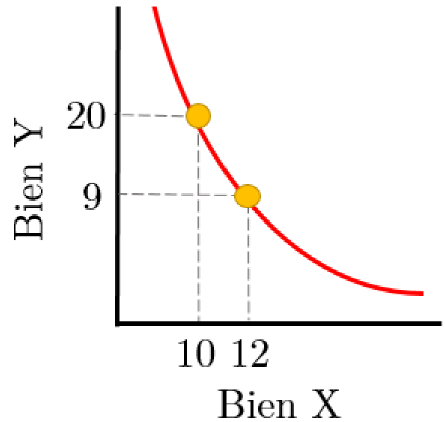
2. ¿Qué es la Tasa de Sustitución del Consumo (TSC, RMS o TMS)? ¿Cuál es su comportamiento al movernos sobre la curva de indiferencia? Suponga un punto A en una curva para dos bienes X e Y. Camila tiene 10 unidades de X y 20 de Y. Cuando se mueve hacia el punto B, su combinación cambia a 12 unidades de X y 9 unidades de Y, ¿cuál es la TSC entre ambos puntos?

   Respuesta: La RMS (o TMS, o TSC) corresponde a la pendiente de la curva de indiferencia. En términos económicos, representa la tasa a la cual un consumidor estaría dispuesto a sustituir un bien por otro, es decir, cuantifica la cantidad de un bien a la que un consumidor está dispuesto a renunciar para obtener una unidad adicional de otro.

   $$RMS = \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{U=U_0}$$

   De acuerdo al supuesto de convexidad de las preferencias, se tiene que la RMS es decreciente. Representando así la idea de una unidad adicional de un bien genera un aumento del beneficio percibido cada vez menor.

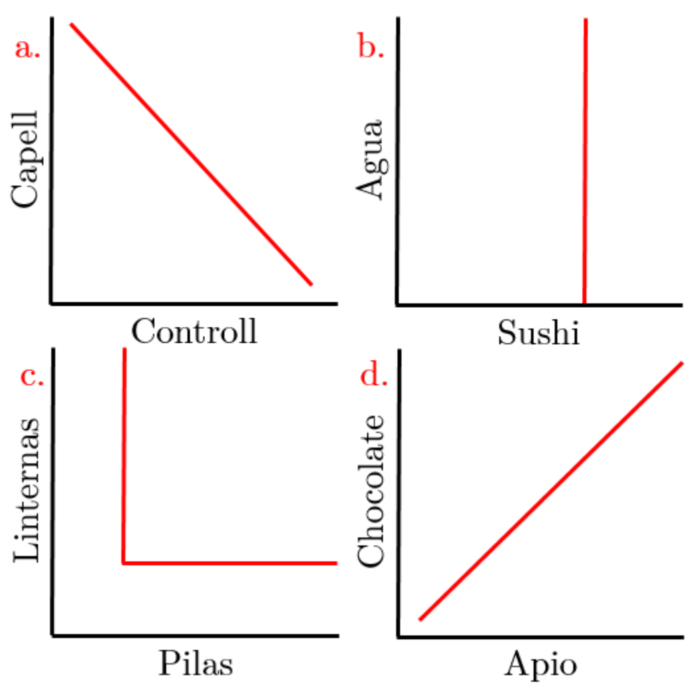
   Al deponer sólo de dos puntos se tiene lo siguiente:



$$RMS = \frac{\Delta Y}{\Delta X}_{U=U_0} = \frac{9-20}{12-10} = \frac{-11}{2} = -5,5$$

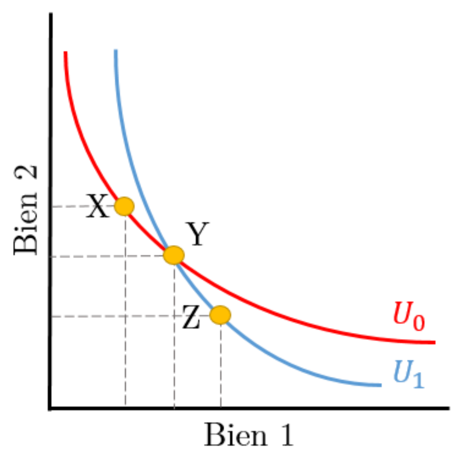
3. Trace las curvas de indiferencia de un consumidor para los siguientes pares de bienes:
   a. El pisco Capell y el Controll son sustitutivos perfectos.
   b. Me gusta el sushi mientras que el agua ni me gusta ni me disgusta.
   c. Siempre necesito una linterna y cuatro pilas.
   d. El chocolate es sabroso, mientras que el apio me pone enfermo.

   Respuesta:



4. Las curvas de indiferencia no se pueden intersectar debido al supuesto "más es mejor que menos". Comente.

    Respuesta: La afirmación está incompleta. Las curvas de indiferencia no se pueden intersectar debido al supuesto de Insaciabilidad (monotonía; "más es mejor") y al axioma de Transitividad. Supongamos 2 curvas de indiferencia que se intersectan. Sea X, un punto sobre la curva de indiferencia cero y Z un punto sobre la curva de indiferencia uno ($U_1 > U_0$). Sea Y el punto en que ambas curvas de indiferencia se intersectan. Como X e Y se encuentran sobre la misma curva, el individuo es indiferente a cualquiera de estas canasta. Como Z e Y se encuentran sobre la misma curva de indiferencia el individuo también esta indiferente entre cualquiera de esas dos canastas. El punto X se encuentra en la curva U_0 y el punto Z se encuentra en la curva U_1 por lo que el individuo prefiere la canasta Z a la canasta X Pero por transitividad tenemos que la canasta X es indiferente a la canasta Y que es indiferente a la canasta Z por lo que el individuo debería estar indiferente entre la canasta X y la Z. Acá tenemos una contradicción que nos indica que las curvas no se pueden intersectar.

5. Explique, usando las propiedades de las curvas de indiferencia, por qué un individuo que tiene cero panes y quince bebidas está dispuesto a intercambiar tres bebidas por un pan. Mientras que en otra situación, si el mismo individuo tiene cuatro panes y nueve bebidas sólo está dispuesto a intercambiar una bebida por un pan.

    Respuesta: Esto se explica a partir del supuesto de convexidad de las preferencias, el cual indica que la utilidad marginal es decreciente (reflejado también en una RMS decreciente). Es decir, cada pan o bebida extra hace al individuo menos "feliz" que el anterior, a pesar que el beneficio total sigue aumentado. Es por esto que el individuo está dispuesto a cambiar más bebidas por pan cuando tiene menos panes, puesto que en términos de utilidad cada unidad de bebidas aporta menos beneficio (ya que tiene muchas bebidas).

6. Se sabe que a Trixi le gusta el maní. Ella prefiere comer 4 maníes y 1 cerveza que 1 cervezas y 4 vestidos, pero prefiere 4 vestidos y 2 maníes a 2 maníes y 4 cervezas. Con la información anterior, ¿es posible deducir que a Trixi le agrada más 8 cervezas y un vestido que 8 manies y un vestido?

    Respuesta: Trixi no es racional, ya que no cumple con el axioma de transitividad. Esto se puede observar, ya que en la primera comparación, se ve que prefiere el maní a los vestidos, de la segunda podemos ver que prefiere los vestidos a la cerveza y en la ultima se ve que prefiere la cerveza en vez del maní. Existe una contradicción, pues se viola el Axioma de Transitividad.

$$(4m, 1c) \succ (1c, 1v) \Rightarrow (1m \succ 1v)$$
$$(4v, 2m) \succ (2m, 4c) \Rightarrow (1v \succ 1c)$$

Si las preferencias de Trixi fueran transitivas $1v \succ 1c$. Sin embargo, esto no sucede. En efecto:

$$(8c, 1v) \succ (8m, 1v) \Rightarrow (1c \succ 1m)$$

7. Demuestre la siguiente expresión a lo largo de una curva de isoutilidad, donde U es la utilidad, x es un producto de una canasta e y es otro producto dentro de la misma canasta:

$$-\frac{dy}{dx} = \frac{UMg_x}{UMg_y}$$

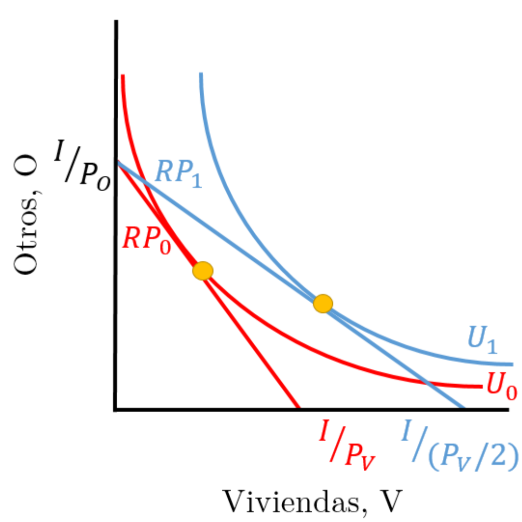
Respuesta:

2. Rebaja de precio, subsidios o ley

Suponga que los individuos consumen sólo dos bienes: metros cuadrados de vivienda y otros artículos. El ingreso es M, los precios son P_V y P_O respectivamente. (Suponga curvas de indiferencia convexas). El gobierno está estudiando tres políticas: una rebaja del precio, un ingreso complementario y una ley.

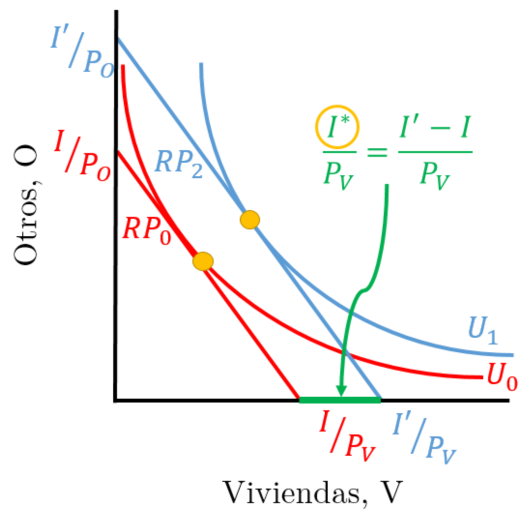
a. Señale qué sucede con el equilibrio si el gobierno decide subsidiar a los consumidores rebajando en un 50 % el precio de cada metro cuadrado de vivienda. Grafique.

Respuesta:



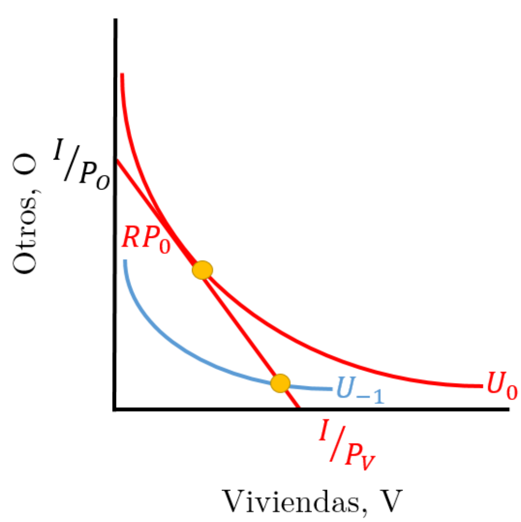
b. Ayudándose con un gráfico, muestre el monto mínimo del ingreso complementario que se debería dar a las personas (en vez del subsidio al precio) para dejarlos indiferentes con respecto a la parte anterior.

Respuesta:



c. Suponga que en vez del subsidio y en vez del ingreso complementario, el gobierno impone una norma que obliga a los individuos a consumir más metros cuadrados de viviendas que en la situación inicial (a). ¿Qué espera que ocurra con la utilidad de los individuos?. (Nota. Vuelva al caso (a), sin modificar la situación presupuestaria).

Respuesta:



3. Efecto ingreso y efecto sustitución

Alexandra gasta todo su ingreso es un software estadístico (S) y vestuario (C). Sus preferencias pueden ser representadas por: $U(S,C) = 4 \cdot \ln(S) + 6 \cdot \ln(C)$

a. Calcule la TMS. ¿Es creciente o decreciente en S? Interprete.

Respuesta:

Como sabemos la Tasa Marginal de Sustitución corresponde a la pendiente de la curva de indiferencia y está representada por:

$$\begin{aligned} TMS &= \frac{\partial U/\partial S}{\partial U/\partial C} \\ &= \frac{4/S}{6/C} \\ &= \frac{2C}{3S} \end{aligned}$$

Notemos que la tasa marginal de sustitución es decreciente en S lo cual nos indica que mientras más unidades del bien S estemos consumiendo, menos unidades del bien C estamos dispuestos a intercambiar por una unidad más de S.

b. Encuentre las demandas marshallianas de cada bien.

Respuesta:

Para encontrar las demandas marshallianas $C^*(p_s, p_c, I)$ y $S^*(p_s, p_c, I)$, debemos resolver el siguiente problema de optimización.

$$\begin{aligned} &\max_{C,S} \quad 4 \cdot \ln(S) + 6 \cdot \ln(C) \\ &\text{s.a} \quad\; p_s \cdot S + p_c \cdot C \leq I \end{aligned}$$

Dado que las preferencias son localmente no saturadas (siempre una unidad extra de cualquiera de los bienes de consumo será mejor), la restricción presupuestaria se tiene con igualdad. Esto es importante pues permite descartar como óptimo a aquellos puntos interiores de la región factible del problema de optimización, sin embargo no debería ser una preocupación para efectos de este curso. Puesto que la restricción se tiene con igualdad, podemos tranquilamente plantear el lagrangeano del problema de la siguiente forma:

$$\mathcal{L} = 4 \cdot \ln(S) + 6 \cdot \ln(C) - \lambda \cdot (p_s \cdot S + p_c \cdot C - I)$$

Ahora derivamos el lagrangeano, imponemos que sus derivadas sean iguales a cero y tendremos un sistema con dos ecuaciones y dos incógnitas (C y S), que deberíamos ser capaces de resolver sin problema:

$$\mathcal{L}_S = \frac{4}{S} - \lambda p_s \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \frac{4}{S^*} = \lambda p_s \tag{1}$$

$$\mathcal{L}_C = \frac{6}{C} - \lambda p_c \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \frac{6}{C^*} = \lambda p_c \tag{2}$$

Dividiendo las ecuaciones 1 y 2, se obtiene:

$$\underbrace{\frac{\left(\frac{4}{S^*}\right)}{\left(\frac{6}{C^*}\right)}}_{TMS} = \frac{p_s}{p_c}$$

De esta expresión, podemos despejar C^*.

$$C^* = \frac{3p_s S^*}{2p_c} \tag{3}$$

Ahora tenemos una relación entre C^* y S^*. Sin embargo, por definición las demandas marshallianas dependen de los precios y el ingreso. Para hacer aparecer el ingreso, debemos utilizar una última restricción: la presupuestaria. Recordemos que esta última se cumple con igualdad.

$$\begin{aligned} p_c C^* + p_s S^* &= I \\ \Rightarrow \cancel{p_c}\left(\frac{3p_s S^*}{2\cancel{p_c}}\right) + p_s S^* &= I \\ \Rightarrow S^* p_s \underbrace{\left(1 + \frac{3}{2}\right)}_{5/2} &= I \end{aligned}$$

$$S^*(p_s, p_c, I) = \frac{2I}{5p_s} \tag{4}$$

Reemplazando la ecuación 3 en 4 se obtiene finalmente C^*.

$$C^* = \frac{3\cancel{p_s}}{\cancel{2}p_c}\left(\frac{\cancel{2}I}{5\cancel{p_s}}\right)$$

$$C^*(p_s, p_c, I) = \frac{3I}{5p_c} \tag{5}$$

c. Determine la curva de Engel para S.

Para obtener la curva de Engel debemos despejar I de la ecuación 4.

$$I = \frac{5}{2} p_s S^* \tag{6}$$

Respuesta:

d. Suponga que los precios son $p_s = 2$ y $p_c = 3$ y el ingreso de Alexandra es $I = 10$. ¿Cuál es la canasta óptima de consumo para Alexandra?

Respuesta:

Reemplazando los datos en las respectivas ecuaciones se obtiene:

$$S^* = \frac{\cancel{2} \cdot 10}{5 \cdot \cancel{2}} = 2$$

$$C^* = \frac{\cancel{3} \cdot 10}{5 \cdot \cancel{3}} = 2$$

Finalmente, la canasta de consumo óptima de Alexandra es $(S^*, C^*) = (2, 2)$.

e. Suponga que el precio del software ahora sube a $p_s = 4$ ¿Cuál es la canasta óptima de consumo para Alexandra?

Respuesta:

Notemos que C^* no variaría, pues es constante en p_s.

$$S^* = \frac{2 \cdot 10}{5 \cdot 4} = 1$$

Esta vez, la canasta de consumo óptima de Alexandra es $(S^*, C^*) = (1, 2)$.

f. ¿Cuál es el ingreso que mantiene el mismo nivel de utilidad de Alexandra ante esta alta de precio?

Respuesta:

$$\begin{aligned}
4\ln(2) + 6\ln(2) &= 4\ln\left(\frac{2I'}{5 \cdot 4}\right) + 6\ln\left(\frac{3I'}{5 \cdot 3}\right) \\
10\ln(2) &= 4\left[\ln\left(\frac{1}{10}\right) + \ln(I')\right] + 6\left[\ln\left(\frac{1}{5}\right) + \ln(I')\right] \\
10\ln(2) &= 4\ln\left(\frac{1}{10}\right) + 6\ln\left(\frac{1}{5}\right) + 10\ln(I') \\
10\ln(2) - 4\ln\left(\frac{1}{10}\right) - 6\ln\left(\frac{1}{5}\right) &= 10\ln(I') \\
\ln(2) - \frac{2}{5}\left[\ln\left(\frac{1}{5}\right) + \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right] - \frac{3}{5}\ln\left(\frac{1}{5}\right) &= \ln(I') \\
\ln(2) - \frac{2}{5}\left[-\ln(5) - \ln(2)\right] - \frac{3}{5}\ln\left(\frac{1}{5}\right) &= \ln(I') \\
\ln(2) - \frac{2}{5}\left[\ln\left(\frac{1}{5}\right) + \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right] - \frac{3}{5}\ln\left(\frac{1}{5}\right) &= \ln(I') \\
{\color{red}\ln(2)} + {\color{blue}\frac{2}{5}\ln(5)} + {\color{red}\frac{2}{5}\ln(2)} + {\color{blue}\frac{3}{5}\ln(5)} &= \ln(I') \\
\frac{7}{5}\ln(2) + \ln(5) &= \ln(I')
\end{aligned}$$

Tomando exponencial a ambos lados se obtiene:

$$I' = 5 \cdot 2^{7/5} \approx 13,2 \tag{7}$$

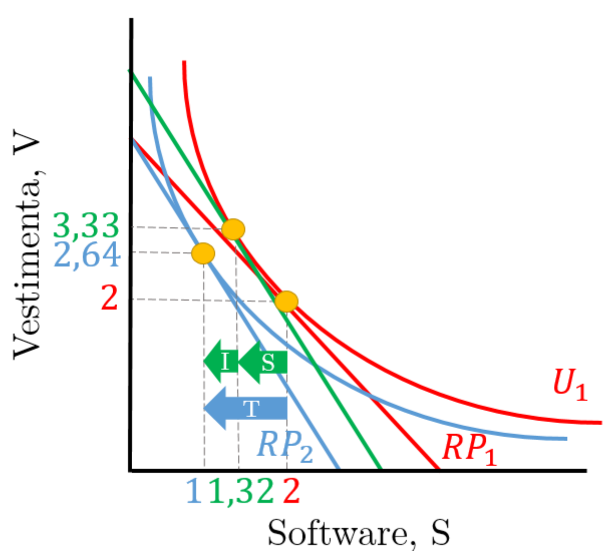
g. Descomponga el efecto sustitución y el efecto ingreso ante el cambio de precios entre (e) y (f).

Respuesta:

Con el Ingreso de la letra (f) podemos determinar la canasta óptima de Alexandra, cuando enfrenta estos precios $p_s = 4$ y $p_c = 3$ y se mantiene en la misma curva de indiferencia, es decir, podemos determina el efecto sustitución. Reemplazando los nuevos datos en las ecuaciones 4 y 5 se obtiene los siguiente:

$$S^* = \frac{2 \cdot 13,2}{5 \cdot 4} \approx 1,32$$
$$C^* = \frac{\cancel{3} \cdot 13,2}{5 \cdot \cancel{3}} \approx 2,64$$

Por tanto, cuando Alexandra se enfrenta a este nuevo precio del software (un alza de precio) ella deja de consumir una unidad del software ($S : 2 \to 1$). Este cambio se conoce como "efecto total" (abreviado en el gráfico como T en el gráfico). Sin embargo, este efecto es la consecuencia de otros dos: el efecto ingreso (I) y el efecto sustitución (S). Si Alexandra hubiese tenido el ingreso I' para alcanzar el mismo nivel de utilidad que antes del alza del precio del software, habría demandado 1,32 unidades de este. Sin embargo como este no es el caso se vio afectada por este efecto ingreso ($S : 1,32 \to 1$), que representa que en términos de utilidad tiene menor poder adquisitivo que antes de la subida de precio de los softwares. Considerando que Alexandra tiene el ingreso para alcanzar el mismo nivel de utilidad, decide sustituir el bien que subió su precio ($S : 2 \to 1,32$) por el que lo mantuvo (esto se explica gráficamente por el cambio de pendiente entre la restricción presupuestaria roja y la verde).



4. Oferta y demanda: colaciones de Beauchef

Considere el mercado de colaciones de Beacuchef. Suponga que en este interesante mercado se satisfacen todos los supuestos de competencia perfecta. La demanda puede ser caracterizada por la siguiente función:

$$Q_d(P) = aP^{-b}I^c$$

Donde P es el precio; I el ingreso; a y b son parámetros positivos distintos de 0, mientras que c es un real cualquiera. La oferta puede ser caracterizada por la siguiente función:

$$Q_o(P) = \gamma P^{\beta}$$

Donde $\gamma \in [0, 1]$ y β es un parámetro positivo.

a. Calcule el equilibrio de mercado.

Respuesta:

Igualando las ecuaciones de oferta y demanda se tiene:

$$\begin{aligned} \gamma P^{\beta} &= aP^{-b}I^c \\ \Rightarrow P^{\beta+b} &= \frac{aI^c}{\gamma} \\ \Rightarrow P_{eq} &= \left(\frac{aI^c}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\beta+b}} \end{aligned} \tag{8}$$

Reemplazando el precio de equilibrio encontrado en cualquiera de las dos ecuaciones (oferta o demanda) se obtiene la cantidad de equilibrio.

$$Q_{eq} = a\left(\frac{aI^c}{\gamma}\right)^{\frac{-b}{\beta+b}} I^c \tag{9}$$

b. Determine los posibles valores que pueden tomar a, b y c tal que la demanda de colaciones es elástica en el precio. Repita el ejercicio para determinar para qué parámetros las colaciones son un bien inferior.

Respuesta:

Para que la demanda sea elástica en el precio, se debe cumplir que $|\varepsilon_{q,p} > 1|$, es decir:

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{q,p} &> 1 \\ \iff \left|\frac{\partial Q_d(P)}{\partial P} \cdot \frac{P}{Q}\right| &> 1 \\ \iff \left|-baP^{-b-1}I^c \frac{P}{aP^{-b}I^c}\right| &> 1 \\ \iff |-b| &> 1 \\ \iff b &> 1 \end{aligned}$$

Por otra parte, para que las colaciones sean un bien inferior se debe cumplir que $\varepsilon_{q,I} < 0$, es decir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_d}{\partial P} \cdot \frac{I}{Q} &< 0 \\ \iff caP^{-b}I^{c-1}\frac{I}{aP^{-b}I^c} &< 0 \\ \iff c &< 0 \end{aligned} \tag{10}$$

c. Las autoridades, preocupados por el bolsillo de los alumnos, está evaluando fijar un precio máximo de $P_{\text{max}} = \left(\frac{a}{\gamma}\right)^{\frac{1}{b+\beta}}$ ¿Tendría efectos sobre el equilibrio de mercado? De ser así, calcule la cantidad de alumnos que, estando dispuestos a comprar colaciones, no podrán hacerlo.

<u>***Respuesta:***</u>

Para el desarrollo de esta pregunta había que darse supuestos sobre los parámetros y concluir en base a ello. Esta indicación se dio durante el control en el que se realizó. Asumiremos que $I \in (0, 1)$ y $c < 0$.

Para que un precio máximo tenga efectos sobre el equilibrio de mercado, se debe cumplir que $P_{max} = P_{eq}$, luego evaluando ambos valores:

$$\begin{aligned} P_{eq} &= \left(\frac{aI^c}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\beta+b}} = \left(\frac{a}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\beta+b}} I^{\frac{c}{\beta+b}} \\ P_{max} &= \left(\frac{a}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\beta+b}} \end{aligned}$$

Asumiendo que $I \in (0, 1)$ y $c < 0$, se tiene que $I^{\frac{c}{\beta+b}} > 1$. Por lo tanto, $P_{max} < P_{eq}$.

Por último, la cantidad de alumnos dispuestos a comprar colaciones que se quedarían sin ella debido a la baja oferta, vendrá dada por:

$$Q_d(P_{max}) - Q_o(P_{max}) = aP_{max}^{-b}I^c - \gamma P_{max}^{\beta} = a\left(\frac{a}{\gamma}\right)^{\frac{-b}{\beta+b}} I^c - \gamma\left(\frac{a}{\gamma}\right)^{\frac{\beta}{\beta+b}}$$

d. Las colaciones Beauchef se han hecho populares en otras universidades del sector, por lo que se espera un aumento de la demanda. Suponga que la demanda de las otras universidades por colaciones es de:

$$Q_{d,2}(P) = 15 - fP$$

Calcule la demanda agregada de colaciones y el nuevo equilibrio de mercado. Para esta pregunta en particular, considere los siguientes valores para los parámetros:

$$a = 100, b = 1, I = 9, c = 1, d = 1, e = 1, f = 1$$

Respuesta:

La demanda total está dada por:

$$Q_d^{Total} = Q_d(P) + Q_{d,2}(P)$$

Hay que tener presente hay que sumar las demanda en aquellos tramos donde son positivas, por lo tanto, la demanda agregada vendrá definida por tramos:

$$Q_d^{Total}(P) = \begin{cases} 900/P + 15 - P & \text{si} \quad P \leq 15 \\ \\ 900/P & \text{si} \quad P > 15 \end{cases}$$

Esto, debido a que la demanda de las otras universidades $Q_{d,2} = 15 - P$ es negativa para valores de P mayores a 15 y, como sabemos, no pueden existir demandas negativas, por lo que la demanda es cero para valores mayores a 15.

Luego, el nuevo equilibrio es el mismo que el de la parte (1), ya que la oferta $Q_0(P) = P$ corta a la demanda en el segundo tramo ($P > 15$), donde la demanda es igual a $Q_d(P)$, que es la demanda original. Entonces:

$$P_{eq} = \left(\frac{aI^c}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\beta+b}} = (100 \cdot \frac{9}{1})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{900} = 30$$
$$Q_{eq} = \frac{900}{P_{eq}} = \frac{900}{30} = 30$$

5. Identificación de costos:

Una empresa tiene la siguiente función de producción:

$$CT = 240 + 5x + 0,5x^2$$

Respuesta:

Identificar CF, CV, $CMeV$, $CMeT$ y CMg.

- **Costo fijo (CF):** CF $= 240$.
- **Costo variable (CV):** CV $= 5x + 0,5x^2$.
- **Costo medio (CMe):** CMe $= \frac{CT}{x} = \frac{240+5x+0,5x^2}{x} = \frac{240}{x} + 5 + 0,5x$.
- **Costo medio variable (CMeV):** CMeV $= \frac{CV}{x} = \frac{5x+0,5x^2}{x} = 5 + 0,5x$.
- **Costo marginal (CMg):** CMg $= \frac{dCT}{dx} = 5 + x$.

6. Producción a la Cobb-Douglas

Considere una firma cuya función está dada por la conocida función Cobb-Douglas, la cual tiene la siguiente forma: $f(k,l) = k^{\alpha} l^{1-\alpha}$, donde k es el capital que ocupa la firma y l la fuerza de trabajo. Sea r el precio unitario del capital k y w el precio unitario (salario) de la fuerza de trabajo.

a. Demuestre que la función de producción Cobb-Douglas tiene retornos constantes a escala.

b. Suponga que la firma quiere producir una cantidad fija q. Obtenga la demanda óptima por factores productivos $k^*(q)$ y $l^*(q)$ y la función de costos (mínimos) $c(q)$. Considere $\alpha = 1/2$

c. Ahora considere que los ingresos de la firma están dados respectivamente por:

   i. $p \cdot q$

   ii. $-q \cdot (q - 10)$. En este caso suponga que $w + r = 1$.

   Para cada caso, calcule el nivel óptimo de producción q^* y la función de utilidad (máxima) $\pi(q^*)$. Recuerde que la firma puede decidir no producir si es que percibe utilidades negativas.