INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Clase auxiliar #10

Teoría de juegos y oligopolios

¡Recordar!

La **teoría de juegos** es una rama de la economía que estudia la interacción estratégica entre agentes.

- **Juego en forma normal:** es una situación que consta de un conjunto de jugadores $\mathcal{I} = \{1, ..., I\}$, conjuntos de acciones A_i para cada jugador $i \in \mathcal{I}$ y pagos $u_i : A = A_1 \times ... \times A_I \to \mathbb{R}$ para cada jugador $i \in \mathcal{I}$ y cada perfil de estrategias $(a_1, ..., a_I) \in A$.
- **Dominancia estricta:** una estrategia A domina estrictamente a una estrategia B si, independiente de lo que haga el resto de los jugadores, jugar A es estrictamente preferible a jugar B.
- **Dominancia débil:** una estrategia A domina débilmente a una estrategia B si, independiente de lo que haga el resto de los jugadores, jugar A es al menos tan preferible que jugar B.
- **Equilibrio de Nash:** perfil de estrategias tal que cada jugador está jugando su mejor respuesta dadas las estrategias elegidas por los otros jugadores.

Un **oligopolio** es un mercado donde co-existe un pequeño número de firmas que proveen un bien o servicio. Algunos modelos de competencia oligopólica son:

- **Modelo de Cournot:** Se dice que un grupo de firmas compiten a la Cournot, si lo que deciden son cantidades de producción. La decisión de la cantidad a producir es simultánea.
- **Modelo de Bertrand:** Ocurre cuando las firmas, en lugar de competir en cantidades, compiten en precios. La decisión del precio de venta es simultánea.
- **Modelo de Stackelberg:** Es una variación del modelo de Cournot, pues ahora la decisión de cuáanto producir es secuencial, es decir, primero decide una firma, luego otra, y otra y así sucesivamente.

1. Juegos clásicos

Para cada uno de los siguientes juegos describa (1) el conjunto de jugadores $\mathcal{I}$, (2) el conjunto de acciones A_i de cada jugador i, (3) las estrategias estrictamente/débilmente dominadas/dominantes si es que existen y (4) los equilibrios de Nash si es que existen.

Respuesta:

Dilema del prisionero

		2	
		C	NC
	C	(1,1)	(-1,2)
1	NC	(2,-1)	(0,0)

Juego de coordinación

		2	
		E	O
	E	(2,2)	(0,0)
1	O	(0,0)	(1,1)

Batalla de los sexos

		2	
		E	O
	E	(2,1)	(0,0)
1	O	(0,0)	(1,2)

Lanzamiento de penales

			2	
		D	I	C
	D	(1,0)	(0,1)	(0,1)
1	I	(0,1)	(1,0)	(0,1)
	C	(0,1)	(0,1)	(1,0)

1.1. Dilema del prisionero

1. $\mathcal{I} = \{1, 2\}$
2. $A_1 = A_2 = \{C, NC\}$
3. En el caso del jugador 1, C (cooperar) está estrictamente dominada por NC (no cooperar). Por lo tanto C es estrictamente dominada (por NC) y NC es estrictamente dominante (sobre C). Dado que el juego es simétrico en acciones y pagos, el caso del jugador 2 es idéntico.
4. La mejor respuesta del jugador 1 cuando el jugador 2 juega C es NC, pues recibe un pago de 2 en lugar de 1. La mejor respuesta del jugador 1 cuando el jugador 2 juega NC es NC, pues recibe un pago de 0 en lugar de -1.

   La mejor respuesta del jugador 2 cuando el jugador 1 juega C es NC, pues recibe un pago de 2 en lugar de 1. La mejor respuesta del jugador 2 cuando el jugador 1 juega NC es NC, pues recibe un pago de 0 en lugar de -1.

   Se observa que el perfil de estrategias (NC, NC) es equilibrio de Nash pues cada jugador elige su mejor respuesta dado lo que está haciendo el otro, no existiendo incentivos a desviarse por ninguno de ellos. $EN = \{(NC, NC)\}$

   Gráficamente se puede encontrar el equilibrio de Nash destacando los mejores pagos a los que puede aspirar el jugador i dada la estrategia que elige el jugador $-i$[1].

		2	
		C	NC
	C	(1,1)	(-1,2)
1	NC	(2,-1)	$\boxed{(0,0)}$

   Otra forma de encontrar un equilibrio de Nash es a través del procedimiento de eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas (EIEED). Este consiste en eliminar de la matriz sucesivamente aquellas estrategias que están estrictamente dominadas. Una estrategia estrictamente dominada nunca será jugada por un jugador racional. Al nunca ser una mejor respuesta es imposible que defina un equilibrio de Nash. Al existir una única solución de EIEED, esta es equilibrio de Nash.

[1] Esta notación es bastante común en teoría de juegos para referiste a jugadores distintos de i

		2	
		C	NC
	C	(1,1)	(-1,2)
1	NC	(2,-1)	(0,0)

➡

		2	
		C	~~NC~~
	C	(1,1)	~~(-1,2)~~
1	NC	(2,-1)	~~(0,0)~~

➡

		2	
		C	~~NC~~
	C	(1,1)	~~(-1,2)~~
1	~~NC~~	~~(2,-1)~~	~~(0,0)~~

1.2. Juego de coordinación

1. $\mathcal{I} = \{1, 2\}$
2. $A_1 = A_2 = \{E, O\}$
3. No hay estrategias dominantes ni dominadas para ningún jugador.
4. La mejor respuesta del jugador 1 cuando el jugador 2 juega E es E. La mejor respuesta del jugador 1 cuando el jugador 2 juega O es O. La mejor respuesta del jugador 2 cuando el jugador 1 juega E es E. La mejor respuesta del jugador 2 cuando el jugador 1 juega O es O. Se concluye que hay dos equilibrio de Nash. Estos son (E, E) y (O, O). Cuando ambos jugadores se eligen la misma estratagia[2] ninguno tiene incentivos a desviarse, pues están eligiendo la mejor estrategia dado lo que elige el otro. $EN = \{(E, E), (O, O)\}$.

		2	
		E	O
	E	$\boxed{(2,2)}$	(0,0)
1	O	(0,0)	$\boxed{(1,1)}$

1.3. Batalla de sexos

Este caso es análogo al juego de coordinación, solo cambia la matriz de pagos.

1.4. Lanzamiento de penales

1. $\mathcal{I} = \{1, 2\}$
2. $A_1 = A_2 = \{D, I, C\}$
3. No hay estrategias dominantes ni dominadas para ningún jugador.
4. La mejor respuesta del jugador 1 cuando el jugador 2 juega D es D. La mejor respuesta del jugador 1 cuando el jugador 2 juega I es I. La mejor respuesta del jugador 1 cuando el jugador 2 juega C es C. Las mejores respuestas del jugador 2 cuando el jugador 1 juega D son I y C. Las mejores respuestas del jugador 2 cuando el jugador 1 juega I son D y C. Las mejores respuestas del jugador 2 cuando el jugador 1 juega C son D y I. En este caso no hay equilibrios de Nash. Es decir, no hay perfiles de estrategias en los que ambos jugadores jueguen su mejores respuestas simultáneamente, pues mientras uno busca coincidir el otro busca diferir. $EN = \phi$.

[2] Esto es, bajo la motivación del juego, encontrarse en el mismo lugar –ya sea el estadio (E) o la ópera (O)–.

		2		
		D	I	C
1	D	(1,0)	(0,1)	(0,1)
	I	(0,1)	(1,0)	(0,1)
	C	(0,1)	(0,1)	(1,0)

2. Competencia a la Bertrand con consumidores leales

Este es un modelo de competencia de Bertrand con consumidores leales/distraídos/inmóviles/etc. Este ejercicio muestra una salida más a la paradoja de Bertrand. Dos firmas $i = 1, 2$ producen un bien homogéneo a un costo por unidad constante igual a $c > 0$. Hay $M = N + 2K$ consumidores, cada uno de los cuales compra 1 unidad o nada. Cada consumidor tiene un valor de reserva igual a $v > c$ y si esta indiferente entre comprar o no comprar $(v = p)$ siempre compra. N consumidores compran de la firma con el menor precio (resuelven indiferencias uniformemente). K consumidores son leales a cada firma. Ellos compran de la firma a la que son leales siempre, a menos que el precio de la firma sea mayor que v. Asuma que $N, K > 0$. Muestre que este juego no tiene equilibrio de Nash.

Respuesta:

El conjunto de jugadores es $\mathcal{I} = \{1, 2\}$ y el conjunto de acciones asociado a cada uno de ellos es $A_i = \{p_i \in \mathbb{R}_0^+\}$. En primer lugar, acotaremos nuestro espacio de perfiles de acciones candidatos a equilibrios de Nash para simplificar el análisis. Recordemos que un equilibrio de Nash no puede estar definido por estrategias estrictamente dominadas, pues estas nunca serán mejores respuestas a nada y quien las juegue siempre tendrá incentivos a desviarse de ellas.

1. **Notar que elegir un precio $\mathbf{p_i > v}$ es una estrategia estrictamente dominada por elegir un precio $\mathbf{p_i = v}$ para cualquier jugador $\mathbf{i \in \{1, 2\}}$.**

   Veamos que $u_i(p_i > v, p_{-i}) = p_i \cdot 0 = 0$, pues nadie compra cuando se ofrece un precio mayor al valor de reserva de los consumidores.

   Por otro lado,

$$u_i(v, p_{-i}) = \begin{cases} (N + 2K)(v - c) & si \quad p_{-i} > v \\ (N/2 + K)(v - c) & si \quad p_{-i} = v \\ K(v - c) & si \quad p_{-i} < v \end{cases}$$

   Claramente $u_i(v, p_{-i}) > u_i(v, p_{-i})\ \forall p_{-i}$. Como $p_i, p_{-i} > v$ son estrictamente dominadas, no pueden definir equilibrios de Nash.

2. **Notar que $\mathbf{p_i \leq c}$ es estrictamente dominada por $\mathbf{p_i = c + \varepsilon}$ con $\mathbf{\varepsilon > 0}$ suficientemente pequeño.**

   Notar que $u_i(p_i \leq c, p_{-i}) \leq 0$, pues la utilidad marginal por cada unidad producida y vendida está dada por $p_i - c \leq c$.

   Por otro lado, $u_i(c + \varepsilon, p_{-i}) > 0$, pues la utilidad marginal por cada unidad producida y vendida es $\varepsilon > 0$ y al menos compran los K consumidores leales, habiendo utilidades estrictamente positivas.

En consecuencia $u_i(c+\varepsilon, p_{-i}) > 0 > u_i(p_i \leq c, p_{-i})$, siendo aquellos precios $p_i \leq c$ estrategias estrictamente dominadas para el jugador i.

Por lo tanto, podemos restringir nuestro análisis a aquellas estrategias $\mathbf{p_i, p_{-i} \in (c, v]}$.

3. **Supongamos por contradicción que existe un equilibrio de Nash con $\mathbf{p_i = p_{-i} \in (c, v]}$.**

   En este caso, cada firma enfrenta una demanda $(N/2+K)$ y recibe utilidades $(N/2+K)(p_i - c)$. Existen incentivos a desviarse, cobrando $p_i - \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. De esta manera se produce simultáneamente una pequeña reducción del ingreso marginal y un aumento abrupto de la demanda, la cual aumenta a $(N+K)$. De esta manera, el jugador que se desvía recibe utilidades $(N+K)(p_i - \varepsilon - c) > (N/2+K)(p_i - c)$.

   Se concluye que no es posible que exista un equilibrio de Nash con $\mathbf{p_i = p_{-i} \in (c, v]}$.

4. **Supongamos por contradicción que existe un equilibrio de Nash con $\mathbf{(p_i, p_{-i}) \in (c, v]}$ y $\mathbf{p_i \neq p_{-i}}$.**

   Sin pérdida de generalidad, supongamos que $p_i < p_{-i}$. La firma i tiene incentivos a desviarse y cobrar un poco más, digamos $p_i + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. Haciendo esto, sigue siendo la opción más barata, enfrentando la misma demanda pero obteniendo ingresos marginales levemente mayores. De esta forma:

$$u_i(p_i, p_{-i}) = (p_i - c)(N+K) < u_i(p_i + \varepsilon, p_{-i}) = (p_i + \varepsilon - c)(N+K)$$

   Se concluye que no es posible que exista un equilibrio de Nash con $\mathbf{(p_i, p_{-i}) \in (c, v]}$ y $\mathbf{p_i \neq p_{-i}}$.

   Finalmente se concluye que no existen equilibrios de Nash en este juego.

3. Stackelberg versus Cournot

Considere un juego de Stackelberg entre dos firmas, 1 y 2. La firma 1 decide $q_1 \geq 0$ primero y luego la firma 2, observando q_1, decide q_2. La demanda inversa esta dada por $P(q1+q2) = \max\{a(q1+q2), 0\}$ con $a > 0$. Las firmas no tienen costos.

a. Muestre que el juego tiene un continuo de equilibrios de Nash.

   Respuesta:

   El conjunto de jugadores es $\mathcal{I} = \{1, 2\}$ y el conjunto de acciones asociado a cada uno de ellos es $A_i = \{q_i \in \mathbb{R}_0^+\}$. Las utilidades están dadas por:

$$u_i(q_i, q_{-i}) = q_i \max\{a - (q_i + q_{-i}), 0\}$$

   Notar que las utilidades del jugador i se ven afectadas por la decisión del jugador $-i$ sobre la cantidad a producir q_{-i}.

   Caso 1: $q_{-i} \geq a$.

   En este caso el máximo que aparece en la función de utilidad necesariamente se iguala a cero.

$$u_i(q_i, q_{-i}) = q_i \cdot 0 = 0$$

Como la utilidad que percibe el jugador i es constante en q_i entonces la mejor respuesta es todo el conjunto de acciones del jugador i.

$$BR_i(q_{-i} \geq a) = \mathbb{R}_0^+$$

Caso 2: $q_{-i} < a$.

En este caso, según la cantidad q_i que elija el jugador i el máximo que aparece en su función de utilidad podría igualarse o no a cero.

$$u_i(q_i, q_{-i}) = \begin{cases} 0 & si \quad q_i + q_{-i} \geq a \\ \\ q_i(a - q_i - q_{-i}) & si \quad q_i + q_{-i} < a \end{cases}$$

Si el jugador i puede obtener $u_i > 0$ eligiento q_i tal que $q_i + q_{-i} < a$, entonces preferirá esta situación a quedarse con utilidad cero. Encontremos la mejor decisión en este caso a través de la condición de primer orden.

$$\frac{\partial}{\partial q_i}(q_i(a - q_i - q_{-i})) = a - q_i - q_{-i} - q_i = a - q_{-i} - 2q_i \overset{!}{=} 0 \Rightarrow q_i^* = \frac{a - q_{-i}}{2}$$

Por lo tanto, cuando el jugador $-i$ elige una cantidad $q_{-i} < a$ la mejor respuesta del jugador i es:

$$BR_i(q_{-i} < a) = \frac{a - q_{-i}}{2}$$

Finalmente, las mejores respuestas del jugador i a las posibles estrategias del jugador $-i$ están dadas por la función:

$$BR_i(q_{-i}) = \begin{cases} \mathbb{R}_0^+ & si \quad q_{-i} \geq a \\ \\ \frac{a-q_{-i}}{2} & si \quad q_{-i} < a \end{cases}$$

Gráficamente se puede observar que los equilibrios de Nash están dados por:

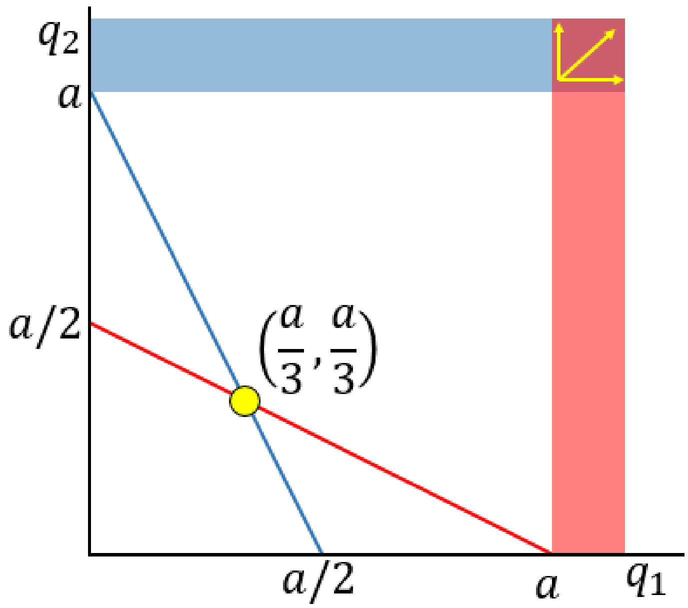
$$EN = \{(a/3, a/3) \cup \{(q_1, q_2) | q_1, q_2 \geq a\}\}$$

b. Encuentre el equilibrio perfecto en subjuegos.

Respuesta:

De la parte anterior, se tiene que:

$$BR_2(q_1) = \begin{cases} \mathbb{R}_0^+ & si \quad q_1 \geq a \\ \frac{a-q_1}{2} & si \quad q_1 < a \end{cases}$$



Como el jugador 1 sabe que el jugador 2 es racional y que jugará su mejor respuesta, maximiza $u_1(q_1, q_2^*(q_1))$ con $q_2^* \in BR_2(q_1)$.

$$u_1(q_1, q_2^*(q_1)) = \begin{cases} 0 & si \quad q_1 \geq a \\ \left[a - q_1 - \left(\frac{a-q_1}{2}\right)\right] q_1 = \left(\frac{a-q_1}{2}\right) q_1 & si \quad q_1 \geq a \end{cases}$$

El jugador 1 elegirá $q_1 < a$ para obtener $u_1 > 0$. A continuación se maximiza u_1 imponiendo condición de primer orden.

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left[\left(\frac{a-q_1}{2}\right) q_1\right] = -\frac{1}{2}q_1 + \left(\frac{a-q_1}{2}\right) = \frac{a}{2} - q_1 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow q_1^* = \frac{a}{2}$$

Dado que el jugador 1 elige una cantidad $a/2$ el jugador 2 elige su mejor respuesta.

$q_2^* = \frac{a-q_1^*}{2} = \frac{a-a/2}{2} = \frac{a}{4}$

Finalmente, se tiene un único equilibrio perfecto en subjuegos.

$$EPS = \left\{\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{4}\right)\right\}$$

En este equilibrio, las utilidades de cada jugador son:

$$u_1(q_1^*, q_2^*) = \frac{a}{2}\left(a - \frac{a}{2} - \frac{a}{4}\right) = \frac{a^2}{8}$$

$$u_2(q_1^*, q_2^*) = \frac{a}{4}\left(a - \frac{a}{2} - \frac{a}{4}\right) = \frac{a^2}{16}$$

c. Muestre que en este juego el que mueve primero siempre está mejor que en la solución de Cournot.

Respuesta:

En el juego de Cournot con 2 firmas, cada una de ellas maximiza $u_i(q_i, q_{-i}) = q_i(a - q_i - q_{-i})$. Usando simetría ($q_i^* = q_{-i}^*$) se llega a que el equilibrio de Nash está dado por $(a/3, a/3)$. En este caso:

$$u_1(q_1^*, q_2^*) = u_2(q_1^*, q_2^*) = \frac{a}{3}\left(a - \frac{a}{3} - \frac{a}{3}\right) = \frac{a^2}{9}$$

De aquí se observa que, en comparación al juego clásico de Cournot en el que los jugadores eligen de manera simultánea, el juego de Stackelberg beneficia al jugador 1 –que elige su estrategia primero– y perjudica al jugador 2 –que elige su estrategia después–.

4. Colusión

Considere dos empresas que comparten un mercado durante infinitos períodos. En cada período deciden si coludirse C o no coludirse NC. La matriz de pagos de cada período es idéntica a la del dilema del prisionero de la pregunta 1. Si las empresas se coluden y alguna de ellas rompe el pacto de colusión, nunca más vuelven a coludirse, jugando el equilibrio de Nash hasta el infinito (esto se conoce como "estrategia gatillo"). Dados los costos de oportunidad de las empresas, \$1 hoy vale más que un \$1 mañana. En particular \$1 mañana vale \$$\delta$ hoy, con $\delta \in [0, 1]$. Notar que δ refleja el grado de "impaciencia" de las empresas. Cuando $\delta \approx 0$, las empresas son impacientes y valoran mucho más el dinero hoy que mañana. Por el contrario, cuando $\delta \approx 1$, las empresas son pacientes, estando prácticamente indiferentes entre recibir un determinado monto de dinero hoy o mañana. Determine la condición que debe cumplir δ para que la colusión sea sostenible.

Respuesta:

Para que la colusión sea sostenible es necesario que las utilidades –traídas a valor presente– de estar coludido (o de monopolio) para cada firma sean mayores a las de desviarse y luego ser castigado jugando equilibrio de Nash, de acuerdo a la "estrategia gatillo" asumida en el enunciado.

$$u_i^{Monopolio} \geq u_i^{Desvío}$$

$$\iff 1 + \delta \cdot 1 + \delta^2 \cdot 1 + ... \geq 2 + \delta \cdot 0 + \delta^2 \cdot 0 + ...$$

$$\iff \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j \geq 2$$

$$\iff \frac{1}{1-\delta} \geq 2$$

$$\iff \frac{1}{2} \geq 1 - \delta$$

$$\iff \delta \geq \frac{1}{2}$$

La condición que debe cumplirse es que $\delta \geq \frac{1}{2}$. Esto quiere decir que las empresas deben ser suficientemente pacientes y para valorar los flujos futuros descontándolos a una tasa no menor a $1/2$.