Hilbert Q
Spin $\frac{1}{2}$
zero vec

Comentarios Iniciales: Spin

Diferente de mom. angular orbital.

1) De la teoría analítica de mom. angular ($L_z = i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$, etc.), l debe ser entero.

2) Pero teoría algebráica $\Rightarrow$ l puede ser semi-entero.
Entonces a pesar de que empezamos con (1), quizás considerar (2) como fundamental, y (1) como caso especial.
(otra opción: descartar casos semi enteros.)

3) Tomamos primera opción: mom. angular se define a partir de su estructura algebráica.

4) ¿Por qué? Observaciones! Vimos que $\bar{e}$ tienen spin, un mom. angular intrínseco semi-entero.

5) Otra dif. importante: cada partícula tiene un spin fijo. e.g. fotón spin 1, $\bar{e}$, p^+, spin $\frac{1}{2}$.
Espacio de Hilbert finito (no como L orbital)

$\rightsquigarrow$ Lo de hoy

fcfm FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Scanned with CamScanner

Cátedra Martes: Producto Tensorial

Temas:

- Motivación para estudiar espacio producto
  - Acoplamiento spin-órbita
  - Estado cuántico de un electrón (con spin!)
  - sistemas con varias partículas
  - Aplicaciones a teoría de información cuántica, entrelazamiento
- Def. y propiedades del prod. tensorial
- Operadores, y el problema de autovalores
- Ejemplos

I| Motivación - Lo usamos cuando "combinamos" distintos espacios de Hilbert.

Presente en muchas partes! En general necesario cuando hay más de un grado de libertad.

1) Relevante para nosotros por acoplamiento spin-órbita, y spin-spin.
Con el profe ya vieron que para spin-spin (est. hiperfina), era necesario calcular $\langle \vec{S}_p \cdot \vec{S}_e \rangle$; estos op. viven en $\mathcal{H}$ distintos! También: $\vec{L}\cdot\vec{S}$.

2) Además: ahora sabemos que el $\bar{e}$ tiene spin $\Rightarrow$ su estado cuántico no está solo descrito por $\Psi_e(x)$ (o $\Psi_e(p)$, etc.). Necesitamos spin para describirlo bien.
vive en otro espacio.

3) Cuando consideramos el estado de un sistema con más de una partícula, recurrimos al prod. tensorial de los $\mathcal{H}$ de cada partícula.

4) Relacionado a lo de arriba: vamos a ver una propiedad del prod. tensorial que es fundamental para el entrelazamiento cuántico.

II| Def y formalismo totalmente naturales pero llevan a cosas sorprendentes

Sean $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ dos Hilberts de dim N_1 y N_2. $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ si asociado a cada par de vec. $|\varphi^{(1)}\rangle \in \mathcal{H}_1$, $|\chi^{(2)}\rangle \in \mathcal{H}_2$, existe un vector $|\Psi\rangle = |\varphi^{(1)}\rangle \otimes |\chi^{(2)}\rangle$ tal que $\otimes$ es distributivo c/r a. suma vectorial, y lineal en multiplicación por #'s complejos.

1) $(\lambda|\varphi^{(1)}\rangle) \otimes |\chi^{(2)}\rangle = \lambda(|\varphi^{(1)}\rangle \otimes |\chi^{(2)}\rangle)$, análogo en 2do término

2) $(|\varphi_1^{(1)}\rangle + |\varphi_2^{(1)}\rangle) \otimes |\chi^{(2)}\rangle = |\varphi_1^{(1)}\rangle \otimes |\chi^{(2)}\rangle + |\varphi_2^{(1)}\rangle \otimes |\chi^{(2)}\rangle$

Estas sumas son diferentes!

Scanned with CamScanner

3) Si tenemos una base para $\mathcal{H}_1$ y una para $\mathcal{H}_2$, $\{|u_i^{(1)}\rangle\}$ y $\{|v_\ell^{(2)}\rangle\}$ resp., el conjunto $\{|u_i^{(1)}\rangle \otimes |v_\ell^{(2)}\rangle\}$ es una base de $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.

Dimensión de $\mathcal{H}$ si $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ finitos? $N_1 N_2$

Qué vectores viven en $\mathcal{H}$? Cómo describirlos? Sabemos que

$$|\varphi^{(1)}\rangle = \sum_1^{N_1} a_i |u_i^{(1)}\rangle, \quad |\chi^{(2)}\rangle = \sum_1^{N_2} b_\ell |v_\ell^{(2)}\rangle$$

Usando las prop. de linealidad, $|\varphi^{(1)}\rangle \otimes |\chi^{(2)}\rangle = \left(\sum a_i |u_i^{(1)}\rangle\right) \otimes \left(\sum b_\ell |v_\ell^{(2)}\rangle\right)$

$= \sum_i \sum_\ell a_i b_\ell |u_i^{(1)}\rangle \otimes |v_\ell^{(2)}\rangle$. Componentes de prod: prod. de las componentes!

Importante: Hay vectores en $\mathcal{H}$ que no son prod. tensorial de vec. en $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$. "Mixed states", estados entrelazados!

Mal ejemplo: $\frac{1}{2}\left(|\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle\right)$ (sí es $|\varphi^{(1)}\rangle \otimes |\chi^{(2)}\rangle$!)

Buen ejemplo: $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle\right)$

Producto Escalar: $\left(\langle\varphi_1^{(1)}| \otimes \langle\chi_1^{(2)}|\right)\left(|\varphi_2^{(1)}\rangle \otimes |\chi_2^{(2)}\rangle\right) \equiv \langle\varphi_1^{(1)}\chi_1^{(2)}|\varphi_2^{(1)}\chi_2^{(2)}\rangle = \langle\varphi_1^{(1)}|\varphi_2^{(1)}\rangle\langle\chi_1^{(2)}|\chi_2^{(2)}\rangle$

Nota: la base $\{|u_i^{(1)} v_\ell^{(2)}\rangle\}$ es ortonormal si $\{|u_i^{(1)}\rangle\}, \{|v_\ell^{(2)}\rangle\}$ lo son.

III| Operadores en $\mathcal{H}$. (lineales)

1) "Extendemos" operadores. Si $A^{(1)}$ actúa en $\mathcal{H}_1$, def $\tilde{A}^{(1)}\left(|\varphi^{(1)}\rangle \otimes |\chi^{(2)}\rangle\right) = \left(A^{(1)}|\varphi^{(1)}\rangle\right) \otimes |\chi^{(2)}\rangle$.

$\Rightarrow$ Conocemos la acción de $\tilde{A}^{(1)}$ sobre $|\psi\rangle = \sum c_{i,\ell} |u_i^{(1)}\rangle \otimes |v_\ell^{(2)}\rangle$

$\tilde{A}^{(1)}|\psi\rangle = \sum c_{i\ell}\left(A^{(1)}|u_i^{(1)}\rangle\right) \otimes |v_\ell^{(2)}\rangle$. Extensión para $B^{(2)}$ análoga.

2) Si $A^{(1)}$ actúa en $\mathcal{H}_1$, $B^{(2)}$ en $\mathcal{H}_2$, def. su producto tensorial $A^{(1)} \otimes B^{(2)}$ por

$\left(A^{(1)} \otimes B^{(2)}\right)\left(|\varphi^{(1)}\rangle \otimes |\chi^{(2)}\rangle\right) = \left(A^{(1)}|\varphi^{(1)}\rangle\right) \otimes \left(B^{(2)}|\chi^{(2)}\rangle\right)$

3) Ejercicios:

a) Mostrar la forma de $\tilde{A}^{(1)}$, $\tilde{B}^{(2)}$ como productos tensoriales de op.

b) Mostrar que $[\tilde{A}^{(1)}, \tilde{B}^{(2)}] = 0$

4) Al igual que con vectores, hay op. $\in \mathcal{O}(\mathcal{H})$ que no son $\otimes$ de op en $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$

Nueva notación: (peligrosa!) $|\varphi^{(1)}\chi^{(2)}\rangle = |\varphi^{(1)}\rangle|\chi^{(2)}\rangle = |\varphi^{(1)}\rangle \otimes |\chi^{(2)}\rangle$.

$A^{(1)}B^{(2)} = A^{(1)} \otimes B^{(2)}$

Extensión $\tilde{A}^{(1)} = A^{(1)}$. NO es prod. de operadores!

Ejemplo: $\vec{L}^2$ v.s. $\vec{S}\cdot\vec{L}$ $\longleftarrow$ Escribir explícitamente

Scanned with CamScanner

Ahora consideramos el problema de autovalores en $\mathcal{H}$.

1) Autovalores de la extensión de $A^{(1)}$:

Tenemos $A^{(1)}|\varphi_n^{i(1)}\rangle = a_n|\varphi_n^{i(1)}\rangle \quad i=1,\dots,g_n$

Ahora cons. $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$. Claramente, $|\varphi_n^{i(1)}\rangle|\chi^{(2)}\rangle$ va a ser autovector, <u>indep.</u> de lo que sea $|\chi^{(2)}\rangle$! $A^{(1)}|\varphi_n^{i(1)}\rangle|\chi^{(2)}\rangle = a_n|\varphi_n^{i(1)}\rangle|\chi^{(2)}\rangle$.

Si $A^{(1)}$ es observable en $\mathcal{H}_1$, sus autoestados forman una base.

$\Rightarrow \{|\varphi_n^{i(1)}\rangle|v_\ell^{(2)}\rangle\}$ es base en $\mathcal{H}=\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$. $\equiv \{|\psi_n^{i,\ell}\rangle\}$, todos autoestados de $A^{(1)}$!

Entonces $A^{(1)}$ es observable en $\mathcal{H}$. Sus autovalores son a_n, igual que antes

<u>Pero</u> la degeneración ahora es $N_2\cdot g_n$.

Ejercicio: mostrar que si $A^{(1)}$ hermítico, su extensión tmb.

2) Autovalores de $A^{(1)}+B^{(2)}\equiv C$

$A^{(1)}|\varphi_n^{(1)}\rangle = a_n|\varphi_n^{(1)}\rangle, \quad B^{(2)}|\chi_p^{(2)}\rangle = b_p|\chi_p^{(2)}\rangle$

$\Rightarrow C|\varphi_n^{(1)}\rangle|\chi_p^{(2)}\rangle = (a_n+b_p)|\varphi_n^{(1)}\rangle|\chi_p^{(2)}\rangle$

(ej: $H=\frac{p_x^2}{2m}+\frac{p_y^2}{2m}$) $\rightsquigarrow$ lleva a cosas interesantes de degeneración

Ejercicio: analicen prob. de autovalores de $A^{(1)}\otimes B^{(2)}$!

$|\psi\rangle$

Aplicaciones

1) Cuáles eran las componentes de $|\varphi^{(1)}\rangle\otimes|\chi^{(2)}\rangle$? Producto de las comp. individuales! Consideremos dos partículas, con funciones de onda $\psi_1(x_1)$, $\psi_2(x_2)$. En la base $|x_1\rangle|x_2\rangle$, la f. de onda es $\psi_1(x_1)\psi_2(x_2)$.

Sneak peek: Si son indistinguibles, esto se tiene que reflejar en la función de onda $\Rightarrow \psi(x) = \psi_1(x_1)\psi_2(x_2) \pm \psi_1(x_2)\psi_2(x_1)$

Principio de exclusión de Pauli!

2) Partícula en 3D. $\mathcal{H}=\mathcal{H}_x\otimes\mathcal{H}_y\otimes\mathcal{H}_z$. Base será $|x\rangle|y\rangle|z\rangle\equiv|\vec{r}\rangle$.

Funciones de la forma $|\varphi\rangle|\chi\rangle|\omega\rangle$ tienen comp's $\varphi(x)\chi(y)\omega(z)$, pero como siempre, no todas las funciones en $\mathcal{H}$ se pueden escribir así.

Interesante: base de autoestados puede ser $|x\rangle|y\rangle|z\rangle$, pero igual $|x\rangle|p_y\rangle|z\rangle$, etc.

Scanned with CamScanner

3) Partícula con spin y que se mueve: ~~...~~ base para este $\mathcal{H}$ va a ser $|\vec{r}\rangle|sm\rangle \Rightarrow$ estado general $|\psi\rangle = \sum_{s,m} \int \psi_{sm}(\vec{r})\, |\vec{r}\rangle |sm\rangle\, d^3\vec{r}$

Caso particular $\bar{e}$: $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_+(r) \\ \psi_-(r) \end{pmatrix} = \int d^3\vec{r}\, \psi_+(\vec{r})\, |\vec{r}\rangle|+\rangle + \int d^3\vec{r}\, \psi_-(\vec{r})|\vec{r}\rangle|-\rangle.$

rep. posición

"espinor" Mencionar tensores GR

Operadores mixtos... de spin: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{\hbar}{2}$

Motivation: $\langle m | L_z S_z | m' \rangle$.

con "orbitales": $\hat{X}$. Ahora, $\hat{X} \otimes \mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} \hat{x} & 0 \\ 0 & \hat{x} \end{pmatrix}$ Algo nuevo: representación matricial.

$$\Rightarrow L_z S_z \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = -\frac{i\hbar^2}{2} \begin{pmatrix} \partial/\partial\phi & 0 \\ 0 & -\partial/\partial\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

Más explícitamente, $\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \varphi_1 |+\rangle + \varphi_2 |-\rangle \quad L_z S_z (\varphi_1 |+\rangle + \varphi_2 |-\rangle) =$

$= (L_z \varphi_1)(S_z |+\rangle) + (L_z \varphi_2)(S_z |-\rangle) = (-i\hbar \partial_\phi \varphi_1)(\frac{\hbar}{2} |+\rangle) + (-i\hbar \partial_\phi \varphi_2)(-\frac{\hbar}{2} |-\rangle) =$ prev. thing

*

Si mido posición y S_z, prob. de medir $[\vec{r}, \vec{r}+d\vec{r}]$ y $S_z = +\frac{\hbar}{2}$ es

$|\psi_+(r)|^2 d^3\vec{r} = |\langle \vec{r}, + | \psi \rangle|^2 d^3\vec{r}$

Cualquier posición y spin $-\frac{\hbar}{2}$: $\int |\psi_-(\vec{r})|^2 d^3\vec{r}$, etc....

$*$ Otro: $\vec{S} \cdot \vec{P} = -\frac{i\hbar^2}{2} \begin{pmatrix} \partial_z & \partial_x - i\partial_y \\ \partial_x + i\partial_y & -\partial_z \end{pmatrix}$ Notar: NO DIAGONAL!

Nota: no es mult. matrices. $S_{1z} S_{2z}$ example