

Punto Aux 10

P1 La amplitud es $A = \langle y | U | x=0 \rangle = \langle y | e^{-iHt} | x=0 \rangle$ ($\hbar=c=1$)

Trabajamos con la base $|p\rangle$, $H|p\rangle = E_p|p\rangle$, $E_p = \sqrt{p^2 + m^2}$.

$$A = \int d^3p \langle y | e^{-iHt} | p \rangle \langle p | x=0 \rangle. \quad \langle x | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}}$$

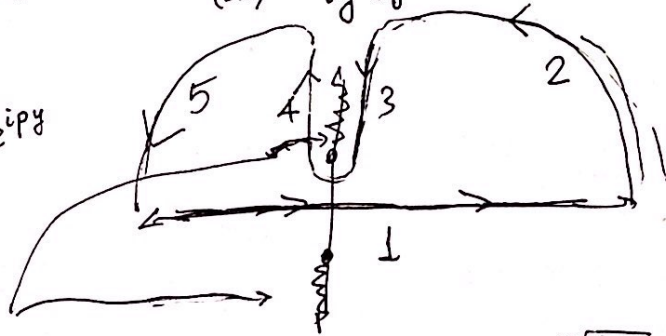
$$= \int d^3p \langle y | p \rangle e^{-iE_p t} \cdot \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} = \int d^3p \cdot \frac{1}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot \vec{y}} e^{-iE_p t}$$

$$= 2\pi \int_0^\infty \frac{dp}{(2\pi)^3} p^2 \int_0^\pi e^{ipy \cos \theta} e^{-iE_p t} \sin \theta d\theta \quad u = \cos \theta$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dp \cdot p^2 \cdot e^{-iE_p t} \int_{-1}^1 e^{ipyu} du = \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \frac{1}{iy} \int_0^\infty dp \cdot p e^{-iE_p t} [e^{ipy} - e^{-ipy}]$$

$$= \frac{-i}{(2\pi)^2 y} \int_{-\infty}^\infty dp \cdot p e^{-it\sqrt{p^2+m^2}} e^{ipy}$$

Puntos rama en $p = \pm im$,
cortes



$y > 0$ entonces e^{ipy} decae exponencialmente en $p \rightarrow i\infty$. $e^{-it\sqrt{p^2+m^2}}$?

$\text{Im}(\sqrt{p^2+m^2}) < 0$ para $\text{Re}(p) < 0$, $\text{Im}(\sqrt{p^2+m^2}) > 0$ para $\text{Re}(p) > 0$, entonces al lado izquierdo, $I_5 \rightarrow 0$. Al lado derecho $I_2 \rightarrow 0$ igual dado que es tipo espacio $\Rightarrow y > t$. Entonces solo quedan las partes verticales:

$$A = \frac{-i}{(2\pi)^2 y} \int_m^\infty d(iz) (iz) e^{-zy} [e^{t\sqrt{z^2-m^2}} - e^{-t\sqrt{z^2-m^2}}]$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^2 y} e^{-mz} \int_m^\infty dz \cdot z e^{-(z-m)y} \sinh(t\sqrt{z^2-m^2})$$

> 0

No tiene sentido! Algo anda mal.

P2]

$$\phi = \alpha \phi^+ + \beta \phi^-$$

$$(a) \square \phi^+ = \int d^3p \frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_p} a_p \square e^{ip_\mu x^\mu}, \text{ donde } \square = \partial_t^2 - \nabla^2$$

$$\square e^{ip_\mu x^\mu} = (-p_0^2 + \vec{p}^2) e^{ip_\mu x^\mu} = (-\omega_p^2 + |\vec{p}|^2) e^{ip_\mu x^\mu}, \text{ pero } \omega_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

$$\Rightarrow (\square + m^2) \phi^+ = 0 \quad (\text{con } \phi^- \text{ es análogo}).$$

(b) Vamos a hacer la (c) simultáneamente usando ~~la~~ la notación

$$\{\phi(x), \phi(y)\} = [\phi(x), \phi(y)]_+, \quad [\phi(x), \phi(y)] = [\phi(x), \phi(y)]_-.$$

Claramente $[\phi^+(x), \phi^+(y)]_{\mp} = 0$ (dependiendo si es boson/fermion). Igual para ϕ^- . Entonces debemos evaluar $[\phi^+(x), \phi^-(y)]_{\mp}$

$$= \int \frac{d^3p d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_p 2\omega_k} e^{ip_\mu x^\mu} e^{-ik_\mu y^\mu} \underbrace{\delta^3(\vec{p} - \vec{k})}_{[a_p, a_k^\dagger]_{\mp}} = \Delta_+(x-y), \text{ donde}$$

$$\Delta_+(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2\omega_p} e^{ip_\mu x^\mu} \quad [a_p, a_k^\dagger]_{\mp}. \text{ Nos ponemos en un sistema}$$

donde $y=0$. Dado que $x^\mu - y^\mu = x^\mu$ es tipo espacio, podemos hacer un boost a un sistema donde $x^0 = t = 0$, $|\vec{x}| = \sqrt{x^2}$. Ahí la integral

$\Delta_+(x)$ se puede hacer parecida a la del problema anterior:

$$\Delta_+(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot 2\pi \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{2\omega_p} \int_{-1}^1 du e^{ip\sqrt{x^2}u} = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{p dp}{2\sqrt{p^2 + m^2}} \frac{\sin(p\sqrt{x^2})}{\sqrt{x^2}} \quad v = \frac{p}{m}$$

$$= \frac{m}{4\pi^2 \sqrt{x^2}} \int_0^\infty \frac{v dv}{\sqrt{v^2 + 1}} \sin(m\sqrt{x^2}v) = \frac{m}{4\pi^2 \sqrt{x^2}} K_1(m\sqrt{x^2}), \text{ que es par bajo}$$

$x^\mu \leftrightarrow -x^\mu$, para $x^2 > 0$. Conclusión: $\Delta_+(x) = \Delta_+(-x)$

$$\Rightarrow [\phi(x), \phi(y)]_{\mp} = \alpha\beta \{ [\phi^+(x), \phi^-(y)]_{\mp} + [\phi^-(x), \phi^+(y)]_{\mp} \}$$

$$[A, B]_{\mp} = \mp [B, A]_{\mp} \Rightarrow [\phi(x), \phi(y)] = \alpha\beta (1 \mp 1) \Delta_+(x-y). \quad (\star)$$

$$[\phi(x), \phi^+(y)] = |\alpha|^2 [\phi^+(x), \phi^-(y)]_{\mp} + |\beta|^2 [\phi^-(x), \phi^+(y)]_{\mp}$$

$$= (|\alpha|^2 \mp |\beta|^2) \Delta_+(x-y) \quad (*).$$

Vemos de $(\star)$ y $(*)$ que con fermiones no se puede anular el conmutador. Con bosones sí - entonces solo los bosones son/pueden ser escalares. Además se requiere $|\alpha| = |\beta|$. Cambiando la fase de los a lo de los estados, se tiene $\alpha = \beta \Rightarrow \phi = \phi^\dagger$.